# Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

## Foglio di esercizi n. 8

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.a.** Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(\sin(4x)) - \cos(3\sinh(x))}{\log(e+x^2) - e^{2x^2}}.$$

Per $x \to 0$, il numeratore è
$$\begin{aligned}
\cosh(\sin(4x)) - \cos(3\sinh(x)) &= \cosh(4x + o(x)) - \cos(3(x+o(x)) \\
&= \left(1 + \frac{(4x+o(x))^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&\qquad - \left(1 - \frac{(3x+o(x))^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= 8x^2 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) = \frac{25x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Mentre il denominatore è
$$\begin{aligned}
\log(e+x^2) - e^{2x^2} &= 1 + \log(1 + x^2/e) - e^{2x^2} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{e} + o(x^2)\right) - \left(1 + 2x^2 + o(x^2)\right) \\
&= \frac{(1-2e)x^2}{e} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$,
$$\frac{\cosh(\sin(4x)) - \cos(3\sinh(x))}{\log(e+x^2) - e^{2x^2}} = \frac{\frac{25x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{(1-2e)x^2}{e} + o(x^2)} \to -\frac{25e}{2(2e-1)}.$$

**Esercizio 1.b.** Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3}}{e^{\sin(x)} - e^{\arctan(x)}}.$$

Per $x \to 0$, il numeratore è
$$\sqrt{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Mentre il denominatore è

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} - e^{\arctan(x)} &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \exp\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{(x + o(x^2))^2}{2!} + \frac{(x + o(x^2))^3}{3!} \\
&\quad - 1 - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{(x + o(x^2))^2}{2!} - \frac{(x + o(x^2))^3}{3!} \\
&= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3}}{e^{\sin(x)} - e^{\arctan(x)}} = \frac{\frac{5x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \to 5.$$

**Esercizio 1.c.** Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 + 2^{1/n})^n + n^{\log(n)}}{\log(n)\left(3^n - \left(3 - \frac{1}{n\log(n)}\right)^n\right)}.$$

Per $n \to \infty$, dopo aver diviso numeratore e denominatore per $3^n$ abbiamo

$$\frac{(2 + 2^{1/n})^n + n^{\log(n)}}{\log(n)\left(3^n - \left(3 - \frac{1}{n\log(n)}\right)^n\right)} = \frac{(1 + \frac{2^{1/n}-1}{3})^n + \frac{n^{\log(n)}}{3^n}}{\log(n)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3n\log(n)}\right)^n\right)}.$$

Ora

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2^{1/n} - 1}{3}\right)^n &= \left(1 + \frac{e^{\ln(2)/n} - 1}{3}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{\ln(2)}{3n} + o(1/n)\right)^n \to e^{\ln(2)/3} = \sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{n^{\log(n)}}{3^n} = \exp\left(\log^2(n) - n\log(3)\right) \to e^{-\infty} = 0.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\log(n)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3n\log(n)}\right)^n\right) &= \log(n)\left(1 - \exp\left(n\log\left(1 - \frac{1}{3n\log(n)}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1 - \exp\left(-\frac{1+o(1)}{3\log(n)}\right)}{1/\log(n)} \to \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Cosi, per $n \to \infty$,

$$\frac{(2+2^{1/n})^n + n^{\log(n)}}{\log(n)\left(3^n - \left(3 - \frac{1}{n\log(n)}\right)^n\right)} \to \frac{\sqrt[3]{2}+0}{1/3} = 3\sqrt[3]{2}.$$

**Esercizio 1.d.** Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\left(\cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right)^n - e^{-\frac{1}{2n}}\right).$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\left(\cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right)^n &= \left(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)^n \\
&= \exp\left(n\log\left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\Big(-\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$e^{-\frac{1}{2n}} = 1 + \left(-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}\right)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Cosi, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
n^2\left(\left(\cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right)^n - e^{-\frac{1}{2n}}\right) &= n^2\left(\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right) \\
&= n^2\left(-\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \to -1.
\end{aligned}$$

**Esercizio 2.a.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = xee^{-1/x} = xe\left(1 - 1/x + o(1/x)\right) = e(x-1) + o(1).$$

Analogamente per $x \to -\infty$,

$$f(x) = xe^{-1}e^{1/x} = xe^{-1}\left(1 + 1/x + o(1/x)\right) = e^{-1}(x+1) + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $+\infty$ e $-\infty$ sono rispettivamente $y = e(x-1)$ e $y = e^{-1}(x+1)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = 0.$$

La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x}\right) \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x \in (1, +\infty), \\ \\ \exp\left(\dfrac{1-x}{x}\right) \dfrac{x-1}{x} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1). \end{cases}$$

Quindi $f$ è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $[1, +\infty)$ ed è decrescente in $(0, 1]$. La funzione non è derivabile in 1 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = 2.$$

Il punto $x = 1$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

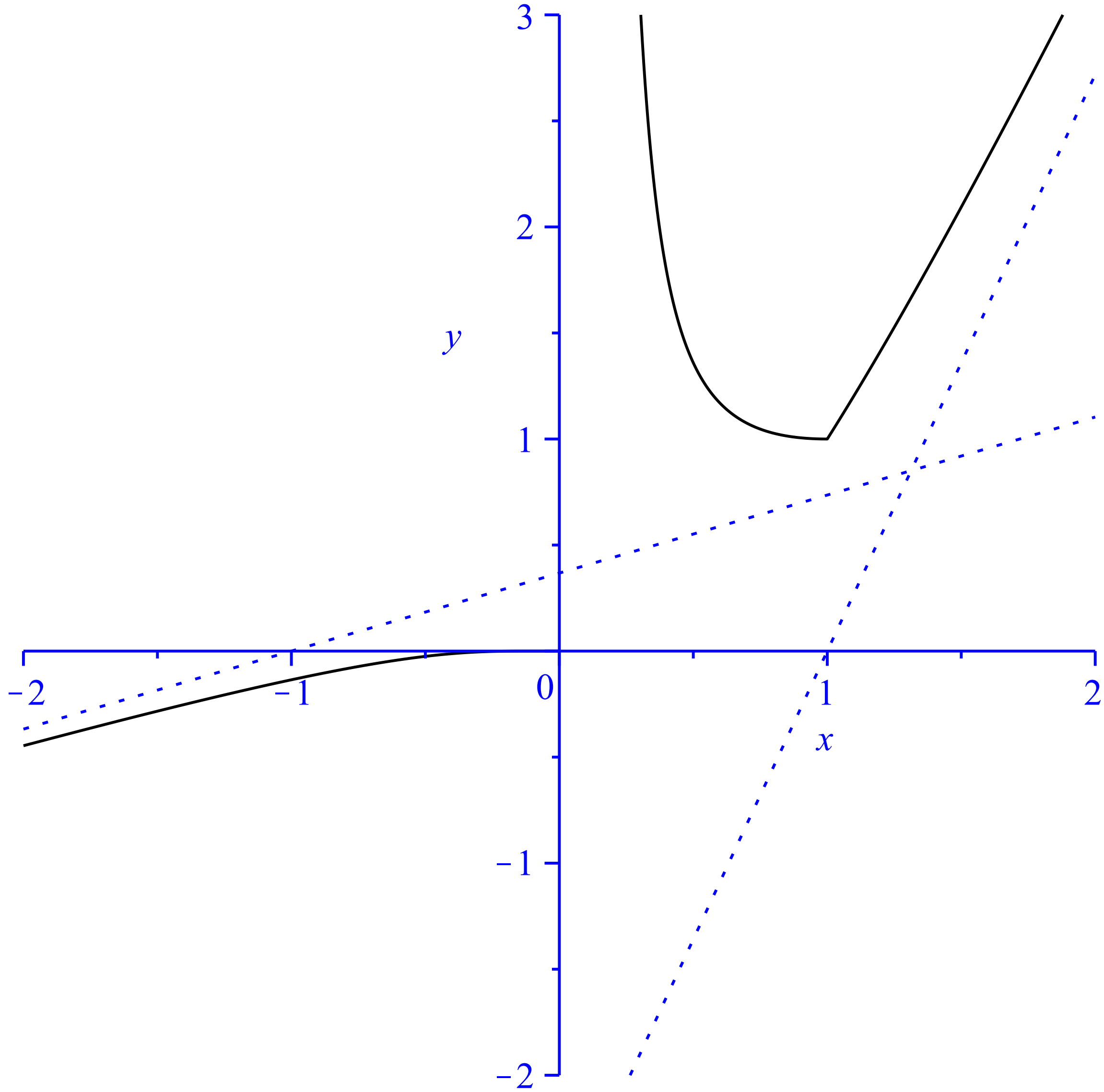


Grafico di $f(x) = x \exp\left(\dfrac{|x-1|}{x}\right)$

**Esercizio 2.b.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3(x^2-1)}{x+3}\right)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{3(x^2-1)}{x+3}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

e quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = \pm\pi/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to-3^\pm} \arctan\left(\frac{3(x^2-1)}{x+3}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

La derivata è

$$f'(x) = \frac{3}{1+\left(\frac{3(x^2-1)}{x+3}\right)^2} \cdot \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.$$

Così per $x \in D$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $x^2+6x+1 \geq 0$ da cui deduciamo che $f$ è crescente in $(-\infty, -3-2\sqrt{2}]$ e in $[-3+2\sqrt{2}, +\infty)$ ed è decrescente in $[-3-2\sqrt{2}, -3)$ e in $(-3, -3+2\sqrt{2}]$. Il punto $x = -3-2\sqrt{2} \simeq -5.83$ è di massimo relativo mentre il punto $x = -3+2\sqrt{2} \simeq -0.17$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

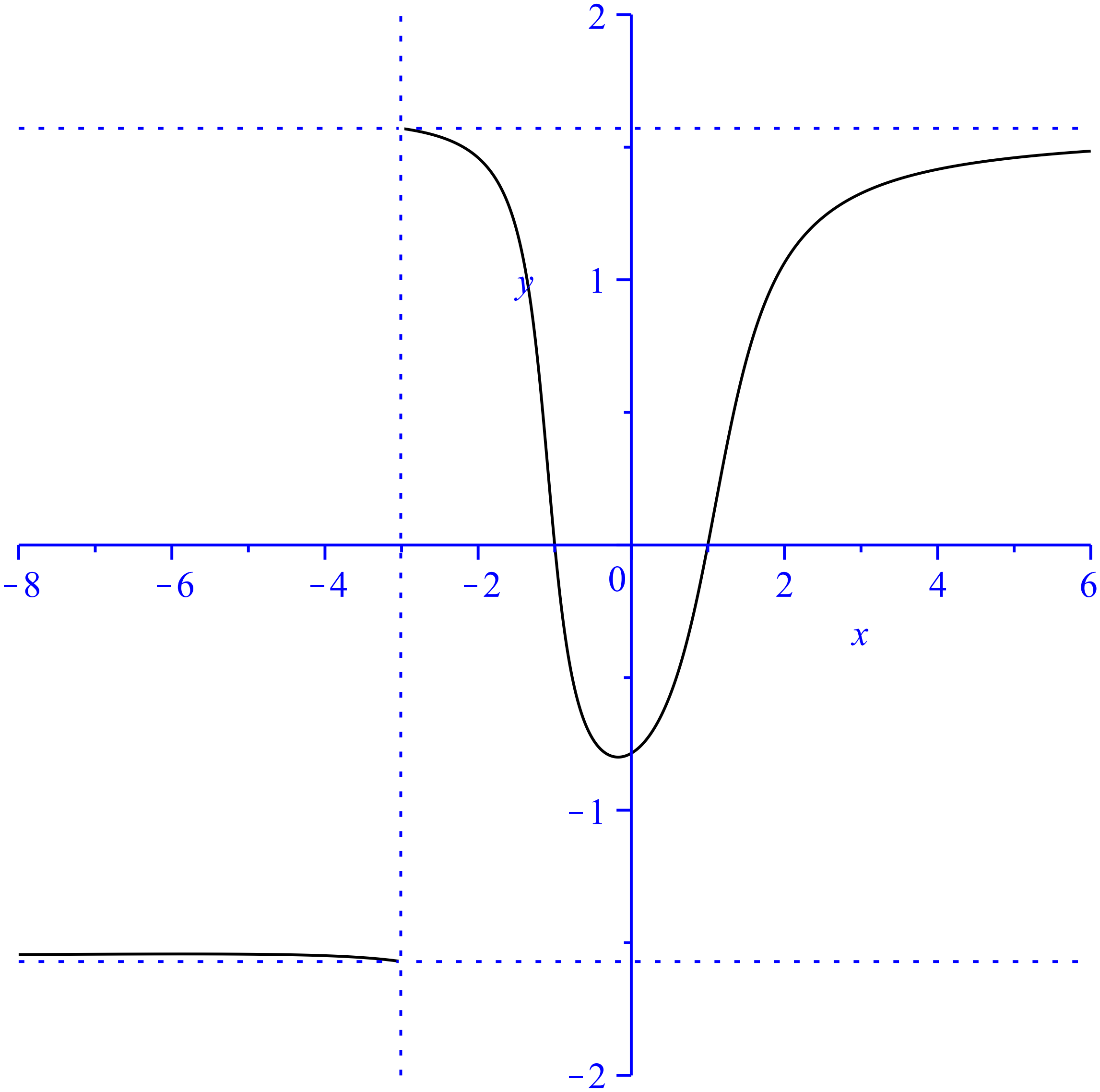


Grafico di $f(x) = \arctan\left(\dfrac{3(x^2-1)}{x+3}\right)$

**Esercizio 3.a.** Calcolare
$$\int \frac{xe^{x^2}}{9+e^{2x^2}}\,dx.$$

Poniamo $t = e^{x^2}$, allora $dt = e^{x^2}2x\,dx$ e

$$\int \frac{xe^{x^2}}{9+e^{2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{3^2+t^2} = \frac{\arctan(t/3)}{6} + c = \frac{\arctan(e^{x^2}/3)}{6} + c.$$

**Esercizio 3.b.** Calcolare
$$\int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx.$$

Poniamo $t = \log(x)$, allora $dt = dx/x$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx &= \int \log(t)dt = t\log(t) - \int t(\log(t))'\,dt\\ &= t\log(t) - t + c = \log(x)\log(\log(x)) - \log(x) + c.\end{aligned}$$

**Esercizio 3.c.** Calcolare
$$\int x\log(1+x)\,dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\int x\log(1+x)\,dx = \int \log(1+x)\,d(x^2/2) &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int x^2 d(\log(1+x))\\ &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{1+x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x}\\ &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\log(1+x)}{2} + c.\end{aligned}$$

Si noti che la funzione $x\log(1+x)$ è definita per $1+x>0$ e quindi nell'integrazione di $1/(x+1)$ non occorre mettere il modulo all'argomento del logaritmo.

**Esercizio 3.d.** Calcolare
$$\int \frac{6x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}+2}{2x-\sqrt{x}}\,dx.$$

Poniamo $t=\sqrt{x}$, allora $t^2=x$, $2tdt=dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{6x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}+2}{2x-\sqrt{x}}\,dx &= 2\int \frac{6t^3+t^2-2t+2}{2t-1}\,dt\\ &= 2\int (3t^2+2t)\,dt + 4\int \frac{dt}{2t-1}\\ &= 2t^3+2t^2+2\log|2t-1|+c\\ &= 2x\sqrt{x}+2x+2\log|2\sqrt{x}-1|+c\end{aligned}$$

dove effettuando la divisione di polinomi si è ottenuto che

$$6t^3+t^2-2t+2=(3t^2+2t)(2t-1)+2.$$

**Esercizio 3.e.** Calcolare
$$\int \left(\frac{\log(x)}{x}\right)^2 dx.$$

Integriamo per parti due volte

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{\log(x)}{x}\right)^2 dx = \int \frac{\log^2(x)}{x^2}\,dx &= \int \log^2(x)\,d\left(-\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) d(\log^2(x))\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - 2\int \left(-\frac{\log(x)}{x^2}\right) dx\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - 2\int \log(x)\,d\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - \frac{2\log(x)}{x} + 2\int \frac{1}{x}\,d(\log(x))\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - \frac{2\log(x)}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= -\frac{\log^2(x)}{x} - \frac{2\log(x)}{x} - \frac{2}{x} + c\\ &= -\frac{\log^2(x)+2\log(x)+2}{x} + c.\end{aligned}$$

**Esercizio 3.f.** Calcolare
$$\int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x)+\cos(x))}{\cos^3(x)}\,dx.$$

Poniamo $t=\tan(x)$, allora $dt = dx/\cos^2(x)$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x)+\cos(x))}{\cos^3(x)}\,dx &= \int \frac{e^{\tan(x)}(\tan(x)+1)}{\cos^2(x)}\,dx\\ &= \int e^t(t+1)\,dt = e^t(t+1-1)+c = e^{\tan(x)}\tan(x)+c.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.a.** Calcolare
$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log(x))^2}\,dx.$$

Poniamo $t=\log(x)$, allora $dt = dx/x$ e
$$\int_1^e \frac{dx}{x(3+\log(x))^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(3+t)^2} = \Big[-\frac{1}{3+t}\Big]_0^1 = -\frac{1}{4}-\Big(-\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{12}.$$

**Esercizio 4.b.** Calcolare
$$\int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,dx.$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,dx &= \int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,d(e^{2x}/2)\\
&= \Big[(1+2x^2)\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,d(1+2x^2)\\
&= \frac{3e^2}{2}-\frac{1}{2}-2\int_0^1 xe^{2x}\,dx\\
&= \frac{3e^2}{2}-\frac{1}{2}-\int_0^1 x\,d(e^{2x})\\
&= \frac{3e^2}{2}-\frac{1}{2}-\Big[xe^{2x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{2x}\,dx\\
&= \frac{3e^2}{2}-\frac{1}{2}-e^2+\Big[\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1\\
&= \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2} = e^2-1.
\end{aligned}$$

**Esercizio 4.c.** Calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x)-2\sin(x))\,dx.$$

Dato che la funzione $|x|\cos(x)$ è pari e la funzione $|x|\sin(x)$ è dispari,
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x)-2\sin(x))\,dx &= 2\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} x\,d(\sin(x))\\
&= 2\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx\\
&= 0+2\Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -2-2=-4.
\end{aligned}$$

**Esercizio 4.d.** Calcolare
$$\int_0^{\pi} \left(\sin^2(x) + \cos^3(x)\right)\, dx.$$

Dato che la funzione $\cos^3(x)$ è dispari rispetto al centro $x = \pi/2$ dell'intervallo $[0, \pi]$, l'integrale $\int_0^{\pi} \cos^3(x)\, dx$ vale zero. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \left(\sin^2(x) + \cos^3(x)\right)\, dx &= \int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.e.** Calcolare
$$\int_0^2 \log(4 + x^2)\, dx.$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int_0^2 \log(4+x^2)\, dx &= \Big[x\log(4+x^2)\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{4+x^2}\, dx \\ &= 2\log(8) - 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+(x/2)^2}\right)\, dx \\ &= 6\log(2) - 2\Big[x - 2\arctan(x/2)\Big]_0^2 \\ &= 6\log(2) - 4 + \pi.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.f.** Calcolare
$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)}\, dx.$$

Poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x)\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)}\, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{1/2} = \frac{\log(3)}{2}.\end{aligned}$$

**Esercizio 5.1.** Fare un esempio di una funzione $f$ continua in $[-1,1]$ tale che la sua media integrale su $[-1,1]$ vale 4 e che ha almeno due punti distinti $x_1, x_2 \in [-1,1]$ per cui $f(x_1) = f(x_2) = 4$.

La funzione

$$f(x) = \sin(\pi x) + 4$$

ha le proprietà richieste. Infatti $f$ è continua in $\mathbb{R}$ e la sua media integrale su $[-1,1]$ è

$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(\pi x)\,dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 4\,dx = 0 + 4 = 4.$$

Inoltre l'equazione $f(x) = \sin(\pi x) + 4 = 4$ ha tre soluzioni in $[-1,1]$ ossia $-1$, $0$ e $1$.

**Esercizio 5.2.** Fare un esempio di una funzione $f$ continua e positiva in $[0,+\infty)$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ha le proprietà richieste. Infatti $f$ è continua e positiva in $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x).$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi per $x \to +\infty$, $y = \pi/2$ è l'asintoto orizzontale.