Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 7

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 4$ della funzione
$$f(x) = x^x.$$

Ponendo $x = t + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
x^x &= \exp((1+t)\log(1+t)) \\
&= \exp\left((1+t)\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\right)\right) \\
&= \exp\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + o(t^4)\right) \\
&= 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + o(t^4)\right) + \frac{1}{2!}\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3 + \frac{1}{4!}(t + o(t))^4 + o(t^4) \\
&= 1 + t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)t^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)t^4 + o(t^4) \\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} + o(t^4).
\end{aligned}$$

Quindi
$$T_4(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{3}.$$

Esercizio 1.b. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x^2}\right).$$

Ponendo $x = t+1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x}{2-x^2}\right) &= \log(1+t) - \log(1-(2t+t^2)) \\ & t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + (2t+t^2) + \frac{(2t+t^2)^2}{2} + \frac{(2t+t^2)^3}{3} + o(t^3) \\ &= (1+2)t + \left(-\frac{1}{2}+1+2\right)t^2 + \left(\frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}\right)t^3 + o(t^3) \\ &= 3t + \frac{5t^2}{2} + 5t^3 + o(t^3).\end{aligned}$$

Quindi

$$T_3(x) = 3(x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} + 5(x-1)^3.$$

Esercizio 1.c. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)} &= \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)(1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + o(x^4)) \\ &\quad \cdot (1 - x^2 + x^4 + o(x^4)) \\ &= 1 + 2x + (4-1-1)x^2 + (8-2-2)x^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + 16 + 1 - 4 + 1 - 4\right)x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2} + o(x^4).\end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2}.$$

Esercizio 1.d. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 5$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(\cos(x))}{1 + \sin^2(x)}.$$

Dato che la funzione è pari, i coefficienti delle potenze dispari di x sono zero. Basta così sviluppare fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\cos(x))}{1+\sin^2(x)} &= \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}{1 + (x + o(x))^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)}{1 + x^2 + o(x^2)} \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - x^2 + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right) x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_5(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12}.$$

Esercizio 1.e. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(x - x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2}}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(x - x^2)}{\sqrt{1+3x^2}} &= \left((x - x^2) - \frac{(x-x^2)^3}{3} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&= \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&= x - x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\right) x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = x - x^2 - \frac{11x^3}{6} + \frac{5x^4}{2}.$$

Esercizio 1.f. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 3\pi/2$ di ordine $n = 4$ della funzione
$$f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}.$$

Ponendo $x = t + 3\pi/2$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos^2(x)} &= \sqrt{1+\cos^2(3\pi/2+t)} = \sqrt{1+\sin^2(t)} \\
&= \sqrt{1+\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)^2} \\
&= \sqrt{1+t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)} \\
&= 1+\frac{t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)}{2}-\frac{(t^2+o(t^2))^2}{8}+o(t^4) \\
&= 1+\frac{t^2}{2}-\frac{7t^4}{24}+o(t^4).
\end{aligned}$$

Quindi
$$T_4(x) = 1+\frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{2}-\frac{7(x-\frac{3\pi}{2})^4}{24}+o((x-3\pi/2)^4).$$

Esercizio 2.a. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos(5/x) - (x^2 - x - 3)e^{1/x}}{\tanh(x)}.$$

Notiamo che per $x \to +\infty$,

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 1.$$

Inoltre ponendo $t = 1/x \to 0^+$,

$$\begin{aligned} x^2\cos(5/x) - (x^2 - x - 3)e^{1/x} &= \frac{1}{t^2}\left(\cos(5t) - (1 - t - 3t^2)e^t\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{25t^2}{2} + o(t^2) - (1 - t - 3t^2)\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) \\ &= \frac{\left(-\frac{25}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 3\right)t^2 + o(t^2)}{t^2} \to -9. \end{aligned}$$

Quindi il limite richiesto vale -9.

Esercizio 2.b. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \tanh(x) + \log(1 - x + x^2)\right)^{1/x^2}.$$

Per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \tanh(x) + \log(1 - x + x^2)\right)^{1/x^2} &= \left(1 + (x + o(x^2)) + (-x + x^2) - \frac{(-x + x^2)^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/x^2} \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/x^2} \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \to \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.c. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log^2(\sin(x)+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x)}.$$

Per $x \to 0^+$, il numeratore è

$$\begin{aligned}
x^2\log^2(\sin(x)+1/x) &= x^2\left(-\log(x)+\log(x\sin(x)+1)\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)\left(-1+\frac{\log(x\sin(x)+1)}{\log(x)}\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Invece il denominatore è

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x) &= -\frac{(2x\log(x))^2}{8}+o(x^2\log^2(x)) \\
&= -\frac{x^2\log^2(x)}{2}+o(x^2\log^2(x)).
\end{aligned}$$

Quindi per $x \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2\log^2(\sin(x)+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x)} &= \frac{x^2\log^2(x)(1+o(1))}{-\frac{x^2\log^2(x)}{2}+o(x^2\log^2(x))} \\
&= \frac{1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)} \to -2.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.d. Calcolare

$$\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{2}{\tan(x)-1}-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x)-1}\right).$$

Sia $t = x - \pi/4$, allora

$$\sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{2}\sin(t+\pi/4) = \sin(t)+\cos(t) = 1+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

e

$$\begin{aligned}
\tan(x) = \tan(t+\pi/4) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} &= (1+t+o(t^2))(1-(t+o(t^2)))^{-1} \\
&= (1+t+o(t^2))(1+(t+o(t^2))+(t+o(t^2))^2+o(t^2)) \\
&= (1+t+o(t^2))(1+t+t^2+o(t^2)) = 1+2t+2t^2+o(t^2).
\end{aligned}$$

Così, per $t \to 0$, abbiamo che,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\tan(x)-1}-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x)-1} &= \frac{2}{2t+2t^2+o(t^2)}-\frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \\
&= \frac{2t-t^2-2t-2t^2+o(t^2)}{2t^2+o(t^2)} \to -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.e. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(\cos(2\sin(x))-\cos(2x))}{x^5+x^2-\sin(x^2)-x^5e^{-x}}.$$

Dall'esercizio 3.f., per $x\to 0$, abbiamo che,

$$\begin{aligned}\frac{x^2(\cos(2\sin(x))-\cos(2x))}{x^5+x^2-\sin(x^2)-x^5e^{-x}} &= \frac{x^2\left(1-2x^2+\frac{4x^4}{3}-1+\frac{(2x)^2}{2}-\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^5+x^2-(x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6))-x^5(1-x+o(x))}\\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)x^6+o(x^6)}{\left(\frac{1}{6}+1\right)x^6+o(x^6)} \to \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.f. Calcolare
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2(x)\,(x+4)^x}{(x+\log(x))^x-x^{x+1}}.$$

Per $x\to+\infty$, $\log(x)/x\to 0$ e quindi

$$\begin{aligned}(x+\log(x))^x &= x^x\exp\left(x\log\left(1+\frac{\log(x)}{x}\right)\right)\\ &= x^x\exp\left(x\Big(\frac{\log(x)}{x}-\frac{\log^2(x)}{2x^2}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x^2}\Big)\Big)\right)\\ &= x^x\exp\left(\log(x)-\frac{\log^2(x)}{2x}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\right)\\ &= x^{x+1}\exp\left(-\frac{\log^2(x)}{2x}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\right)\\ &= x^{x+1}\Big(1-\frac{\log^2(x)}{2x}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big)\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}\frac{\log^2(x)\,(x+4)^x}{(x+\log(x))^x-x^{x+1}} &= \frac{\log^2(x)\,x^x(1+\frac{4}{x})^x}{x^{x+1}\Big(1-\frac{\log^2(x)}{2x}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big)-x^{x+1}}\\ &= \frac{\frac{\log^2(x)}{x}\,(1+\frac{4}{x})^x}{-\frac{\log^2(x)}{2x}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)}\\ &= \frac{(1+\frac{4}{x})^x}{-\frac{1}{2}+o(1)} \to -2e^4.\end{aligned}$$

Esercizio 3.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = [0, 1) \cup (1, 2]$. La funzione vale zero in $x = 0$ e $x = 2$, è negativa in $(0, 1)$, ed è positiva in $(1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} = \mp\infty.$$

La funzione è derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - x^2)^{1/2}(x - 1)^2}.$$

Studiando il segno di f' abbiamo che la funzione è crescente in $[0, 1)$ ed è decrescente in $(1, 2]$. Inoltre

$$f''(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2}{(2x - x^2)^{3/2}(x - 1)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa $[1 - \sqrt{2/3}, 1)$ e in $[1 + \sqrt{2/3}, 2]$ ed è concava in $[0, 1 - \sqrt{2/3}]$ e in $(1, 1 + \sqrt{2/3}]$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo mentre $x = 2$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto. I punti $x = 1 - \sqrt{2/3}$ e $x = 1 + \sqrt{2/3}$ sono dei flessi.

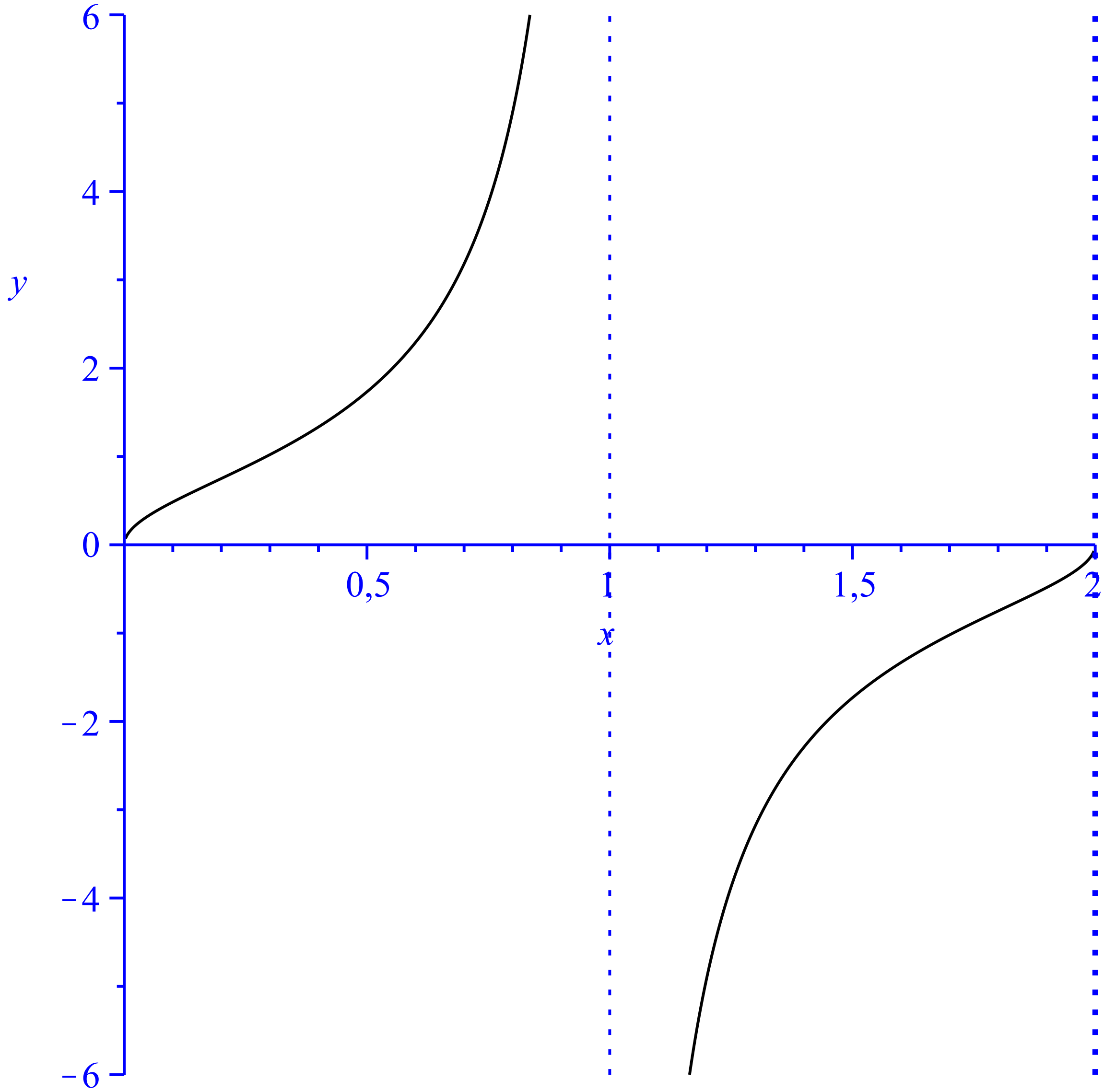


Grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$

Esercizio 3.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-2x^2} + 1 - |x|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R}$ e la funzione è pari. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = 1 - |x| + o(1).$$

e quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = 1 - x$ e $y = 1 + x$.
La funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e per $x > 0$

$$f'(x) = -4xe^{-2x^2} - 1.$$

La derivata prima è sempre negativa per $x > 0$ e quindi f è decrescente in $[0, +\infty)$ ed è crescente in $(-\infty, 0)$. La funzione non è derivabile in 0 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_{-}(0) = 1 \quad f'_{+}(0) = -1.$$

Il punto $x = 0$ è di massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo assoluto.
Inoltre

$$f''(x) = 4e^{-2x^2}(4x^2 - 1)$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa in $[1/2, +\infty)$ e in $(-\infty, -1/2]$ mentre è concava in $[-1/2, 1/2]$. I punti $x = -1/2$ e $x = 1/2$ sono dei flessi.

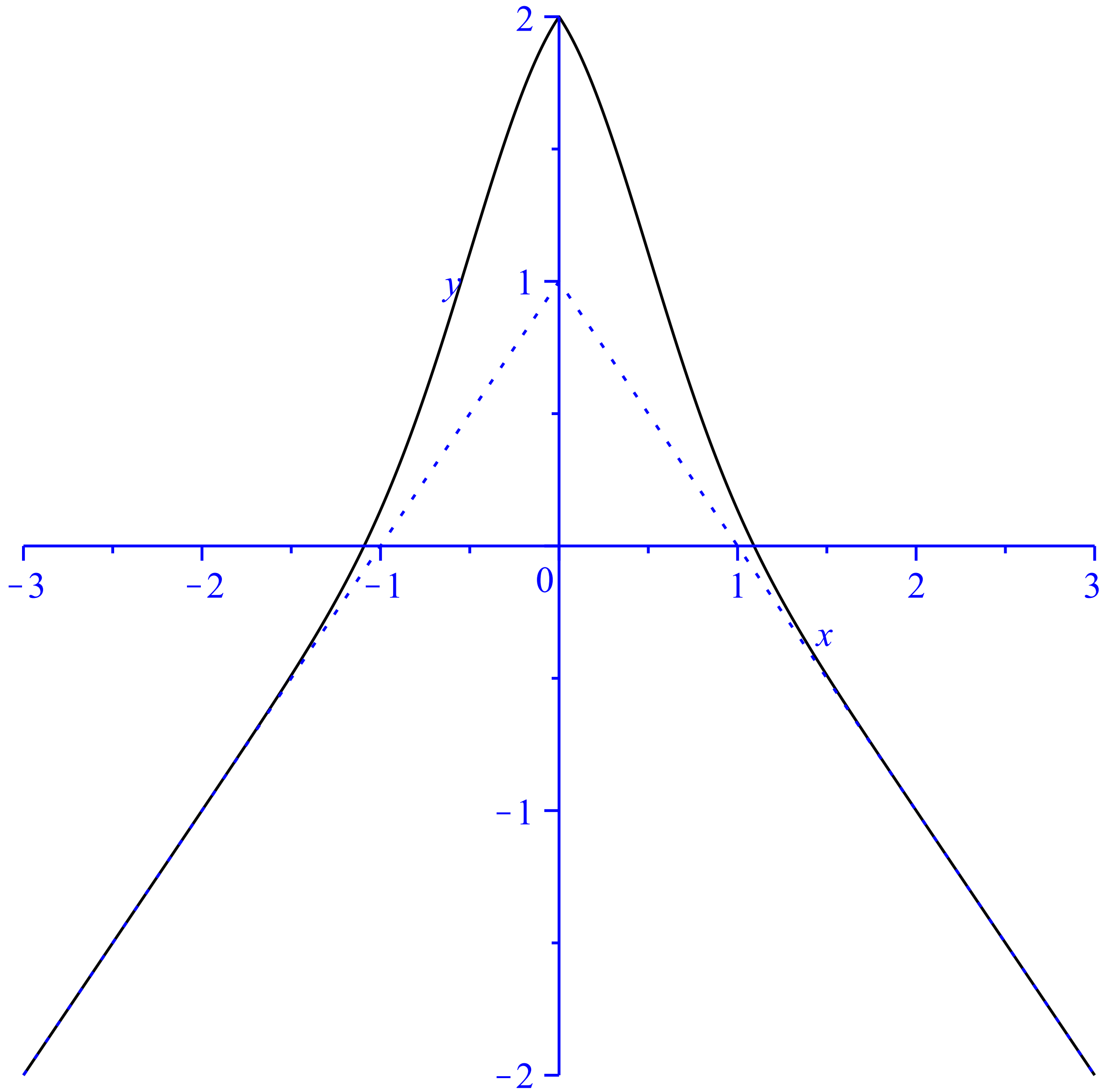


Grafico di $f(x) = e^{-2x^2} + 1 - |x|$

Esercizio 3.c. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva in $(-\infty, -2\sqrt{2})$ e in $(2\sqrt{2}, +\infty)$, si annulla in $x = 0$, in $x = \pm 2\sqrt{2}$. Per $|x| \to +\infty$, la funzione tende a 1 e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2} = -\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4(x-4)}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \dfrac{4x}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 dove c'è un punto angoloso

$$f'_-(-2) = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = \frac{1}{8}.$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2, 0]$ e in $(2, 4]$ ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, in $[0, 2)$ e in $[4, +\infty)$. Il punto $x = 4$ è di massimo assoluto e il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Il punto $x = -2$ è di minimo relativo e non ci sono punti di minimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8(x-5)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ -\dfrac{8(x+1)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa $[-2, -1]$ e in $[5, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 2)$ e in $(2, 5]$. I punti $x = -1$ e $x = 5$ sono dei flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $|x| \to +\infty$, la funzione tende a $\pi/2$ e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = \pi/2$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^\pm} \arctan\left(|x| + \frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Per $x \in D$, la derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^4 + 3x^2 + 1} & \text{se } x > 0, \\ \\ -\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

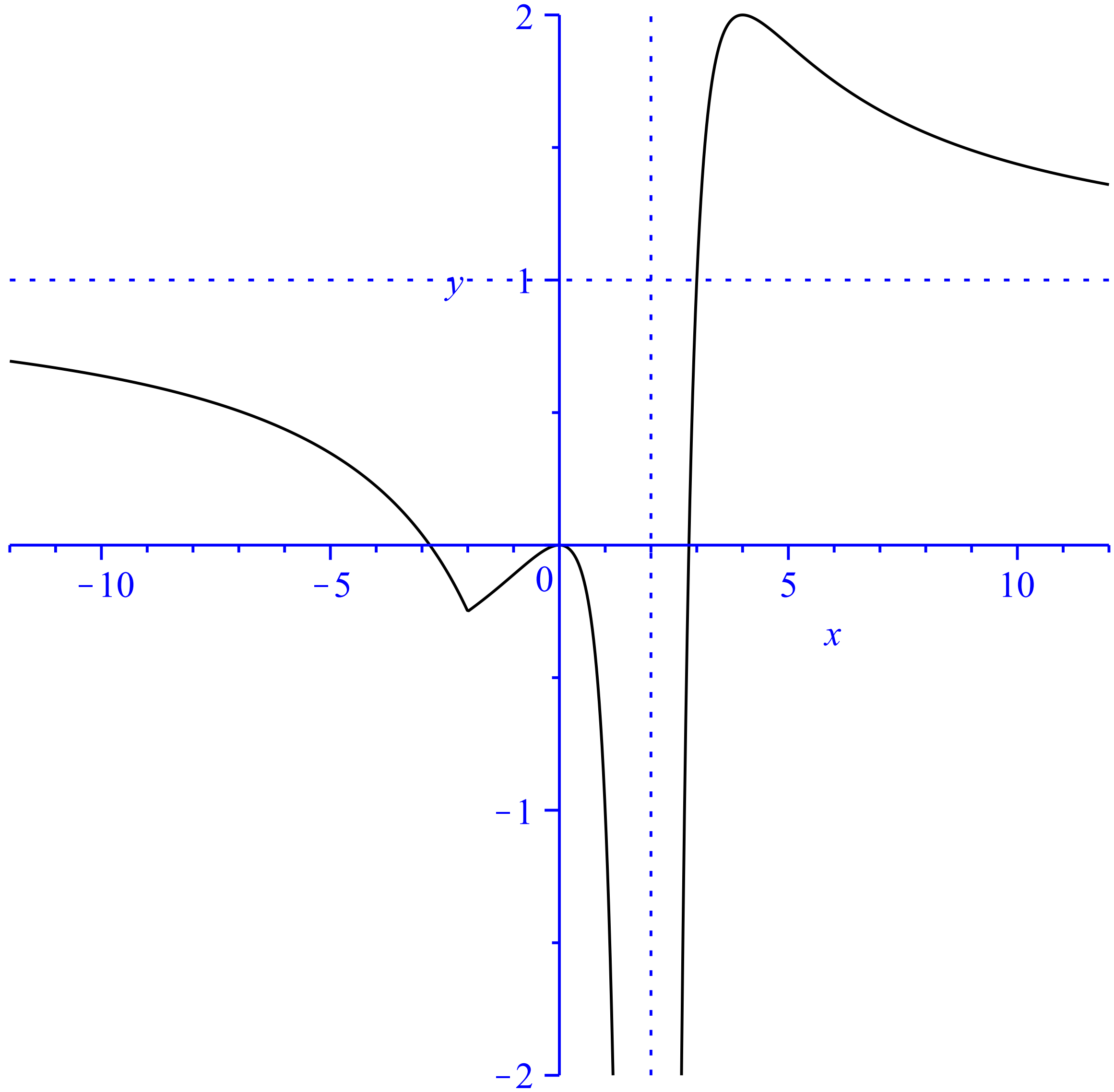


Grafico di $f(x) = \dfrac{|x^2-4|-4}{(x-2)^2}$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[1,+\infty)$ ed è decre-scente in $(-\infty,0)$ e in $[1,+\infty)$. Il punto $x=1$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.
Per $x \in D$, la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x(x^4-2x^2-4)}{(x^4+3x^2+1)^2} & \text{se } x>0, \\[2ex] \dfrac{2x(x^4+2x^2-2)}{(x^4-x^2+1)^2} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa in $[-\sqrt{\sqrt{3}-1}, 0)$ e in $(0, \sqrt{\sqrt{5}+1}]$, mentre è concava in $(-\infty, -\sqrt{\sqrt{3}-1}]$ e in $[\sqrt{\sqrt{5}+1}, +\infty)$. I punti $x = -\sqrt{\sqrt{3}-1} \simeq -0.86$, e $x = \sqrt{\sqrt{5}+1} \simeq 1.80$ sono dei flessi.

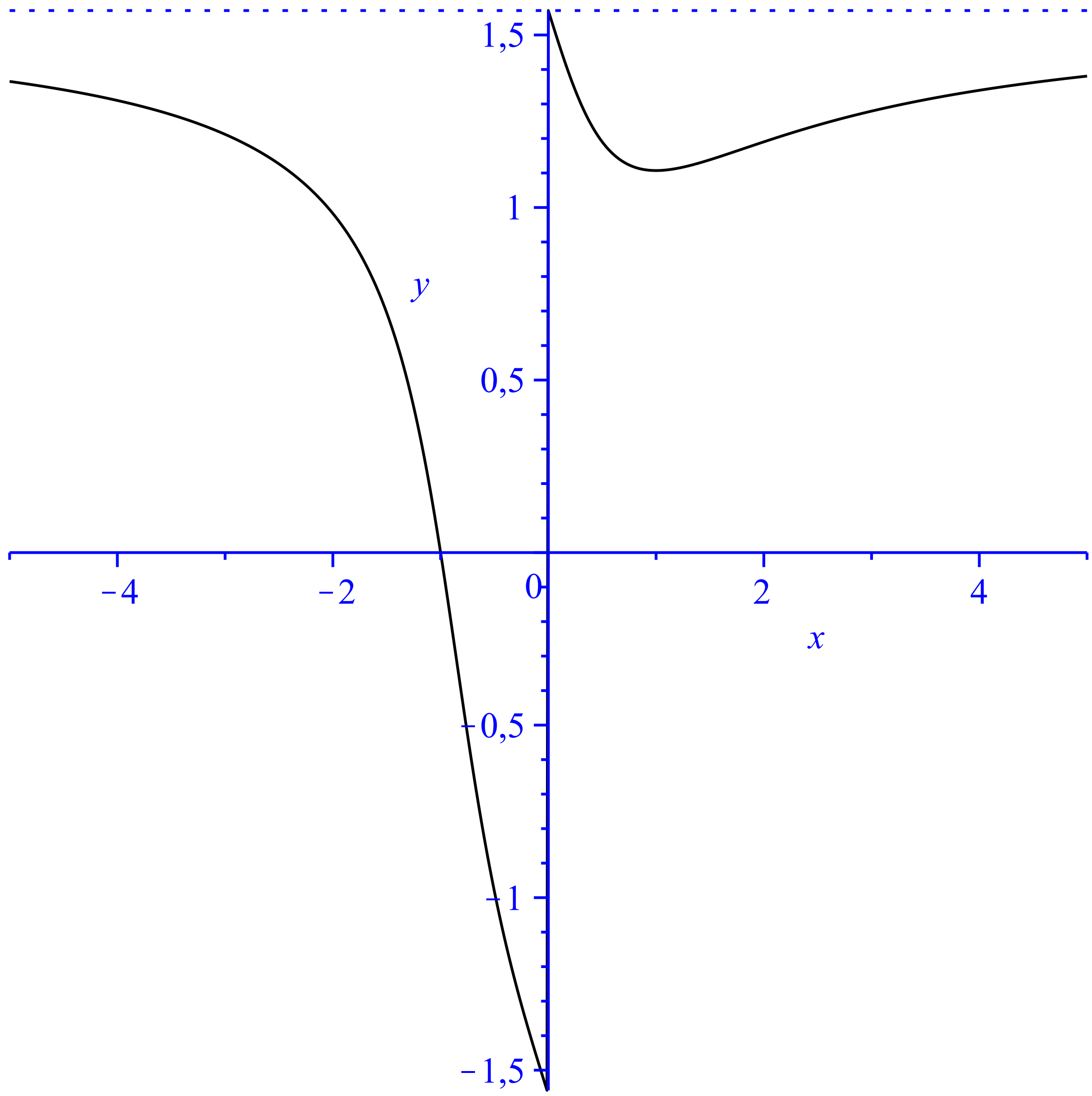


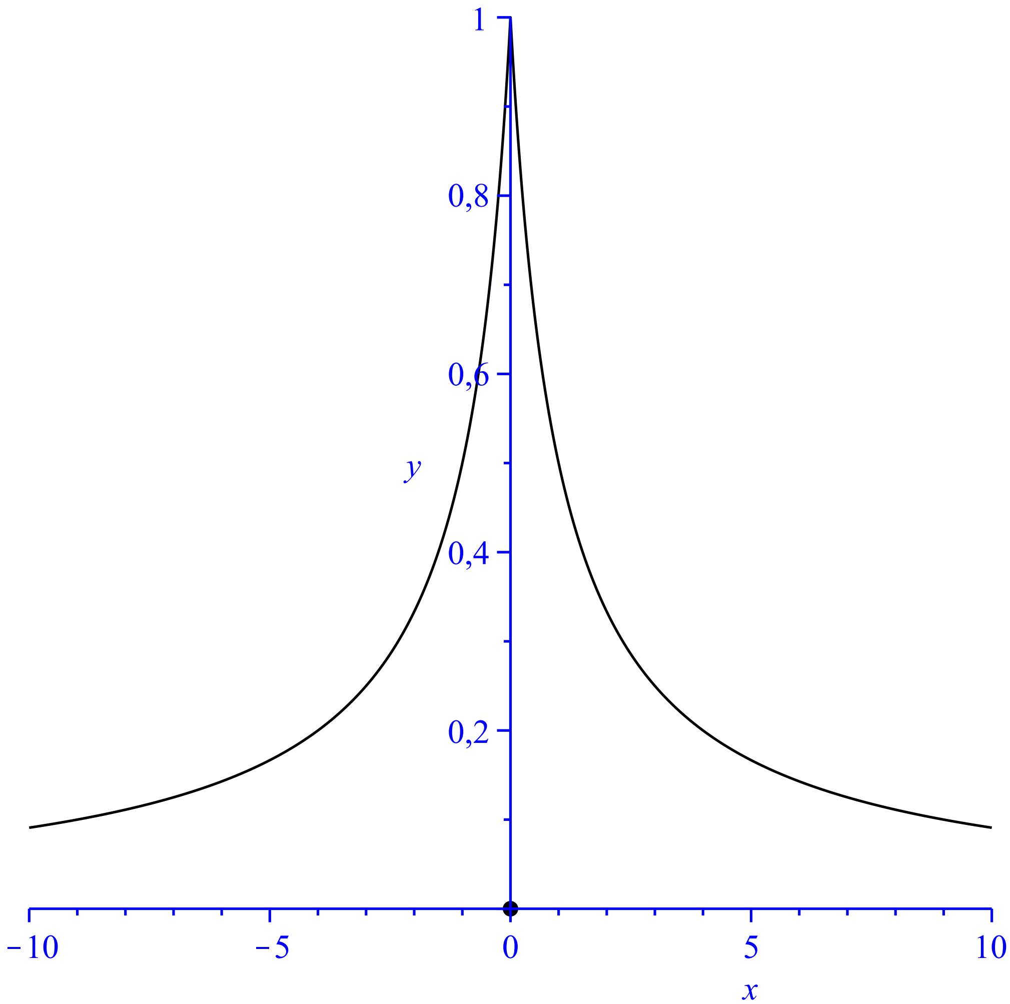
Grafico di $f(x) = \arctan\left(|x| + \dfrac{1}{x}\right)$

Esercizio 4.a. Fare un esempio di una funzione definita in $\mathbb{R}$ tale che $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ e strettamente crescente in $(-\infty, 0)$.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x| + 1} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha le proprietà richieste. f strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ e strettamente crescente in $(-\infty, 0)$. Inoltre per ogni $x \neq 0$, $f(x) > 0 = f(0)$ e quindi $x = 0$ è un punto di minimo assoluto.



Esercizio 4.b. Fare un esempio di un polinomio con almeno due punti di flesso tale che le rette tangenti in tali punti siano ortogonali.

Il polinomio

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2}{8}$$

ha le proprietà richieste. La derivata prima e la derivata seconda sono

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 12x}{8} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{12x^2 - 12}{8} = \frac{3}{2}(x-1)(x+1)$$

e quindi i punti $x = 1$ e $x = -1$ sono dei punti di flesso. Le rette tangenti in tali punti sono:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x + \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = x + \frac{3}{8}.$$

Dato che $f'(1) \cdot f'(-1) = -1$, tali rette sono ortogonali.

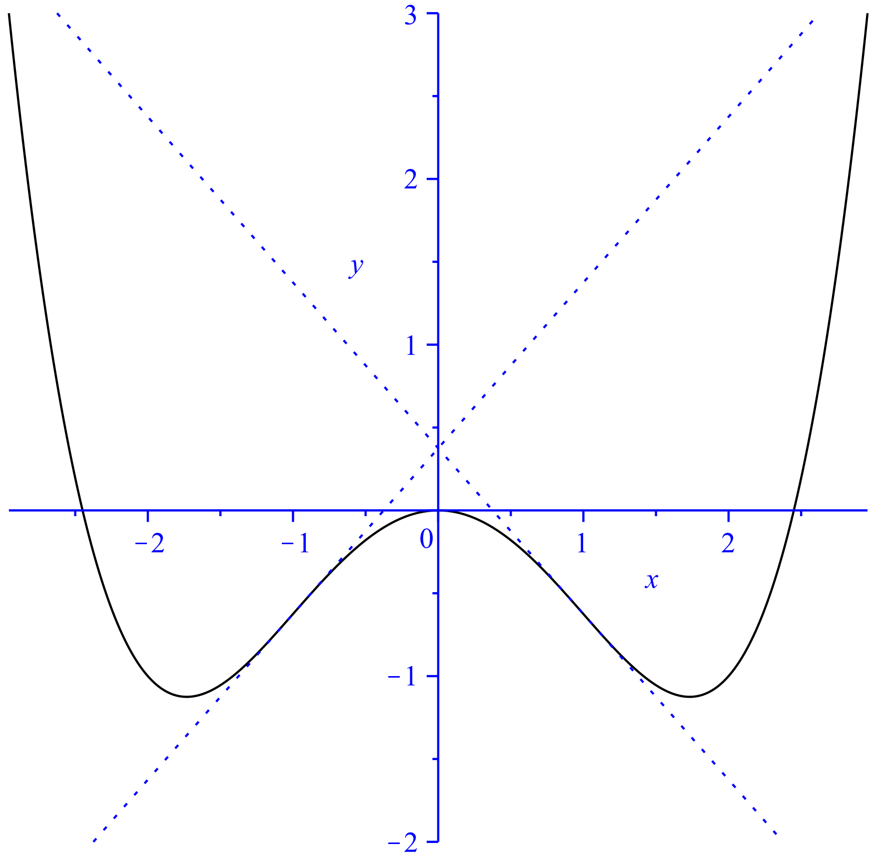


Grafico di $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2}{8}$

Esercizio 4.c. Fare un esempio di una retta $y = mx + q$ che sta tra il grafico di $\log(x)$ e il grafico di $2 + (x-5)^2$ ossia tale che $\forall x > 0$, $\log(x) \le mx + q \le 2 + (x-5)^2$.

La funzione $f(x) = \log(x)$ è concava e quindi il suo grafico sta sotto le sue rette tangenti: per ogni $x_0, x > 0$:

$$\log(x) \le y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{x - x_0}{x_0} + \log(x_0)$$

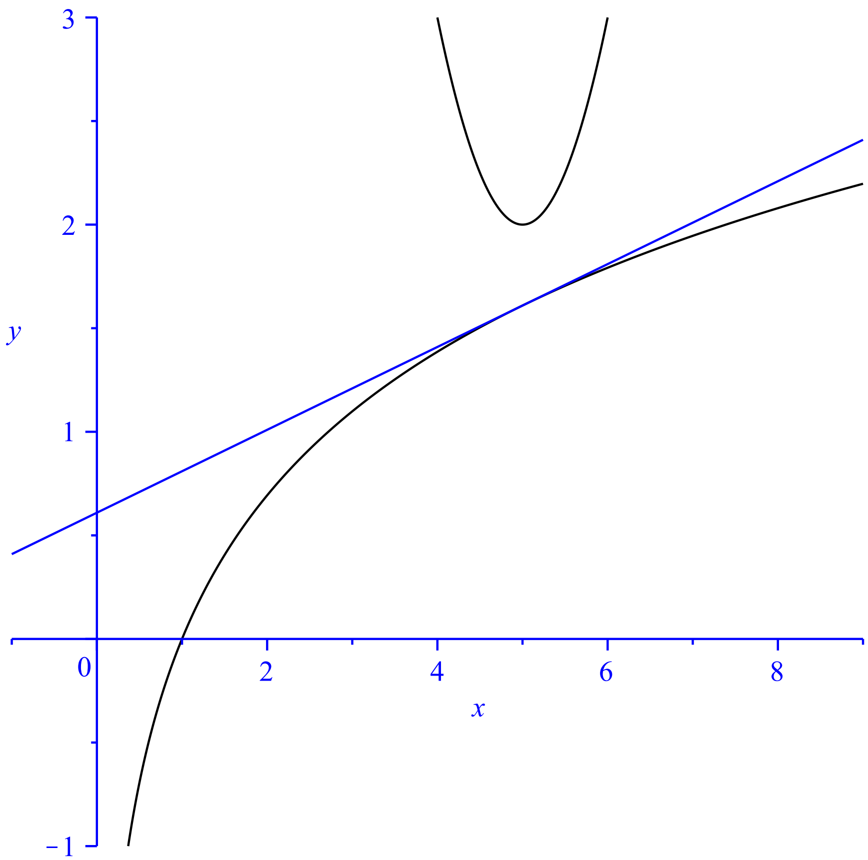
Facendo qualche esperimento, ad esempio con Desmos, si scopre che la retta tangente per $x_0 = 5$ dovrebbe stare sotto il grafico della parabola $g(x) = 2 + (x-5)^2$ (ci sono anche altri valori di x_0 che vanno bene). Dimostriamo tale proprietà ossia che per ogni $x > 0$,

$$\frac{x-5}{5} + \log(5) \le 2 + (x-5)^2$$

che equivale a

$$\log(5) \le (x-5)^2 - \frac{x-5}{5} + 2$$

che è vera perché il valore minimo del polinomio di secondo grado a destra vale $2 - \frac{1}{100}$ (si ottiene per $x = 5 + \frac{1}{10}$) che è maggiore di $\log(5)$.



$$\forall x > 0, \quad \log(x) \le \frac{x}{5} + \log(5) - 1 \le 2 + (x-5)^2$$