Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 6

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + b & \text{se } x < 3 \\ ax & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Per la continuità basta studiare cosa accade in $x = 3$. Affinché f sia continua dobbiamo imporre che

$$\lim_{x \to 3^-} |x^2 - 4| + b = \lim_{x \to 3^+} ax = f(3) = 3a$$

ovvero che $5 + b = 3a$.
Per la derivabilità, osserviamo che il ramo destro è regolare, mentre il ramo sinistro della funzione ha due punti di non derivabilità, ossia dei punti angolosi in $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$:

$$f'_-(-2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = -4 \quad , \quad f'_-(2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(2) = 4.$$

Affinché f sia derivabile in $x = 3$, è necessario che la funzione sia continua in $x = 3$, ossia $3a = 5 + b$, e

$$a = f'_+(3) = f'_-(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Quindi f è derivabile in 3 se e solo se $a = 6$ e $b = 13$.

Esercizio 1.b. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non deriva-bilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) & \text{se } x \in [-1,1] \\ ax + bx^2 & \text{se } x \in (1,2) \\ \sqrt{|x-3|} & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}$$

In questo caso la funzione è definita sull'intervallo $[-1, 4]$.
In $[-1,1) \cup (1,2) \cup (2,4]$ la funzione è continua. In $x = 1$, affinché la funzione sia continua si deve avere che

$$\lim_{x \to 1^+} ax + bx^2 = a + b = f(1) = \pi.$$

In $x = 2$, per la continuità dobbiamo avere che

$$\lim_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b = f(2) = 1.$$

Derivabilità. La derivata di $2\arcsin(x)$ è $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, che non è definita in $x = \pm 1$ e quindi in tali punti f non è derivabile. In particolare in $x = 1$ la derivata destra è $a + 2b$ e quindi $x = 1$ è un punto angoloso.
Nel punto $x = 2$, per la derivabilità è necessario che $2a + 4b = 1$ e

$$f'_-(2) = a + 4b = f'_+(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi f è derivabile in 2 se e solo se $a = 3/2$ e $b = -1/2$.
Infine in $x = 3$ la funzione ha ancora un punto di non derivabilità, ossia una cuspide:

$$f'_-(3) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(3) = -+\infty.$$

Esercizio 2.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^{1/x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = (0, +\infty)$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\log(x)/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{\log(x)/x} = 1$$

quindi $y = 1$ è l'asintoto per $x \to +\infty$.
Per $x > 0$ si ha che

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}$$

e quindi f è crescente in $(0, e]$ ed è decrescente $[e, +\infty)$. Inoltre $x = e$ è un punto di massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo relativo.

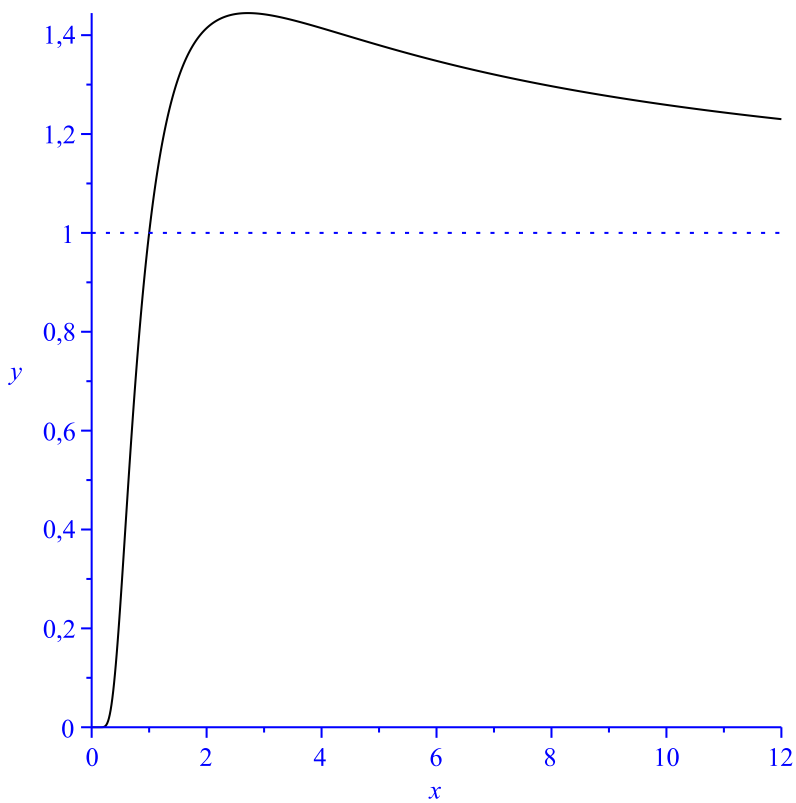

Grafico di $f(x) = x^{1/x}$

Esercizio 2.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

La funzione è pari con dominio $D = \mathbb{R}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

quindi $y = 0$ è l'asintoto per $x \to \pm\infty$. Per $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2]$$

e dunque f è crescente in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 0]$ e in $[1, 2]$, ed è decrescente in $[-2, -1]$, in $[0, 1]$ e in $[2, +\infty)$. Confrontando i valori nei punti stazionari abbiamo che i punti $x = \pm 1$ sono di minimo assoluto mentre i punti $x = \pm 2$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.

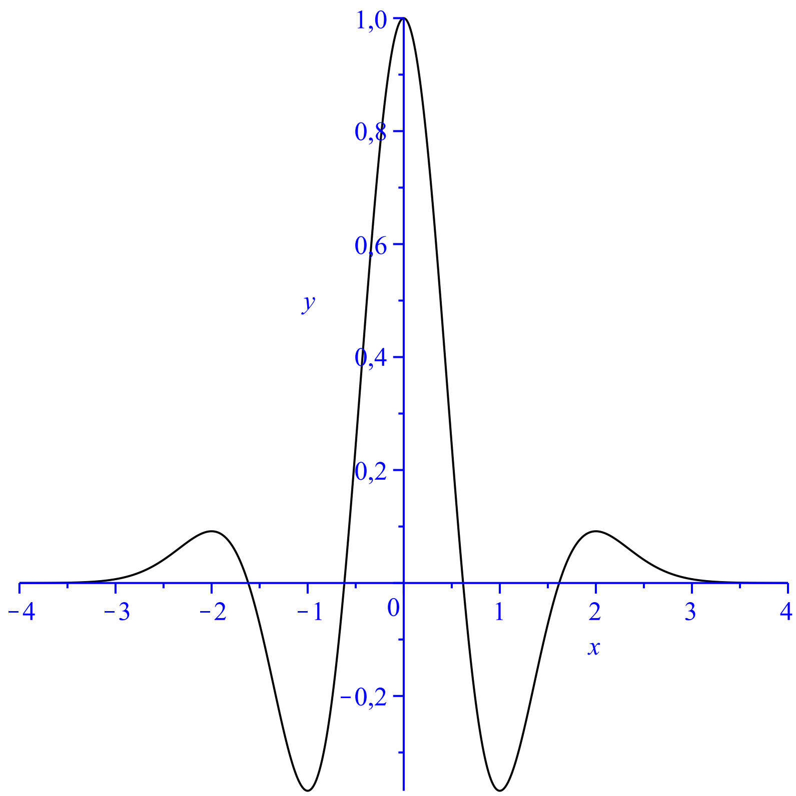

Grafico di $f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$

Esercizio 2.c. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2|x|^3}{x^2 - 4}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

La funzione è pari con dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{2|x|}{1 - 4/x^2} = 2|x| \left(1 + 4/x^2 + o(1/x^2)\right) = 2|x| + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = \pm 2x$.
Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{2|x|^3}{x^2 - 4} = \pm\infty.$$

Per $x \geq 0$ la derivata è

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Si noti che la funzione è derivabile in D (anche in $x = 0$) e per $x \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 12 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{3}.$$

Quindi per $x \geq 0$, f è crescente in $[2\sqrt{3}, +\infty)$ ed è decrescente in in $[0, 2)$ e $(2, 2\sqrt{3}]$. I punti $x = \pm 2\sqrt{3}$ sono di minimo relativo mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

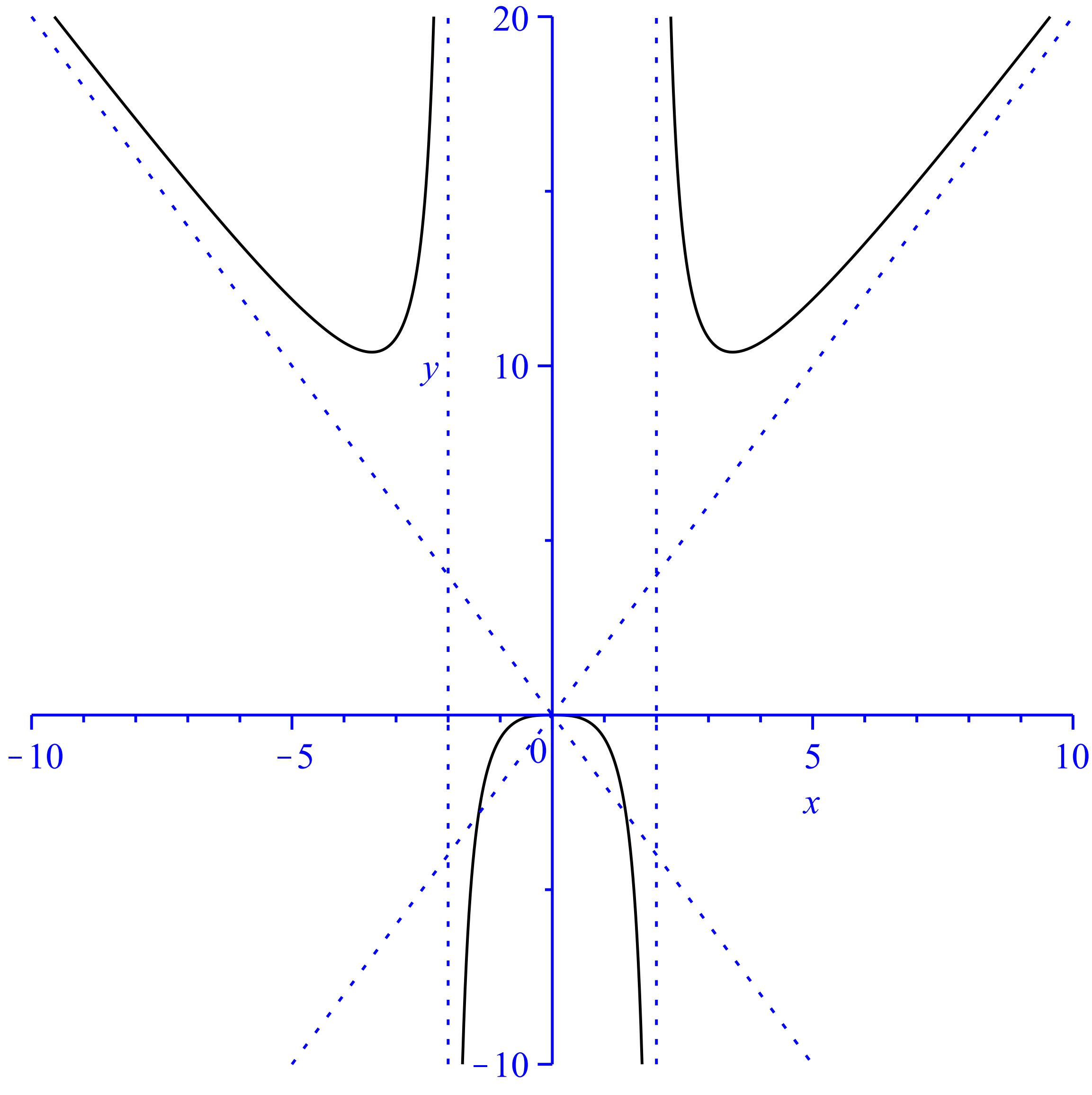

Grafico di $f(x) = \dfrac{2|x|^3}{x^2 - 4}$

Esercizio 2.d. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (|x+1|+1)e^{1/x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione è sempre positiva. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = (x+2)e^{1/x} = (x+2)\left(1 + 1/x + o(1/x)\right) = x + 3 + o(1)$$

mentre per $x \to -\infty$,

$$f(x) = -xe^{1/x} = -x\left(1 + 1/x + o(1/x)\right) = -x - 1 + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = x + 3$ e $y = -x - 1$.
Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} (|x+1|+1)e^{1/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} (|x+1|+1)e^{1/x} = +\infty.$$

Per $x \in D$ e $x > -1$ la derivata è

$$f'(x) = (x+1)(x-2)\frac{e^{1/x}}{x^2},$$

mentre per $x \in D$ e $x < -1$ la derivata è

$$f'(x) = (1-x)\frac{e^{1/x}}{x}.$$

La funzione non è derivabile in -1 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(-1) = -2e^{-1} \quad \text{e} \quad f'_+(-1) = 0.$$

Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[2, +\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 2]$. Il punto $x = 2$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

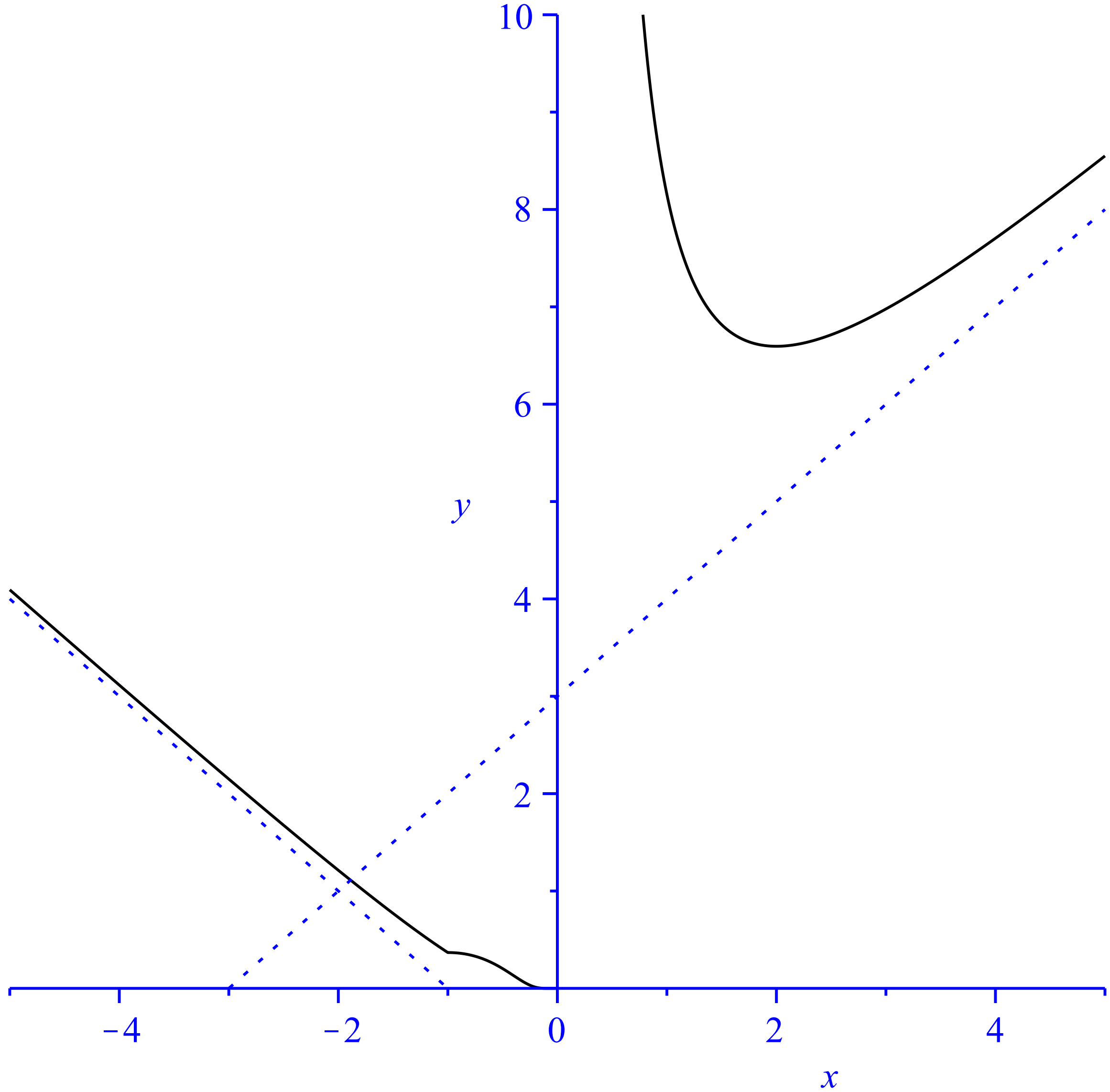

Grafico di $f(x) = (|x+1|+1)e^{1/x}$

Esercizio 2.e. Tracciare il grafico della funzione

$$\sqrt{|4x^2+6x-4|} = \sqrt{2(x+2)(2x-1)}.$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R}$. La funzione è sempre non-negativa e si annulla in $x = -2$ e in $x = -1/2$ che sono dei punti di minimo assoluto. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = \sqrt{|4x^2+6x-4|} = 2|x|\sqrt{1 + \frac{3}{2x} + o(1/x)} = 2|x| + \frac{3|x|}{2x} + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = 2x + 3/2$ e $y = -2x - 3/2$.
La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+3}{\sqrt{|4x^2+6x-4|}} & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (1/2,+\infty), \\[2ex] -\dfrac{4x+3}{\sqrt{|4x^2+6x-4|}} & \text{se } x \in (-2, 1/2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 e in $1/2$ dove ci sono delle cuspidi. Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2,-3/4]$ e in $[1/2,+\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty,-2]$ e in $[-3/4,1/2]$. Il punto $x = -3/4$ è di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo assoluto.

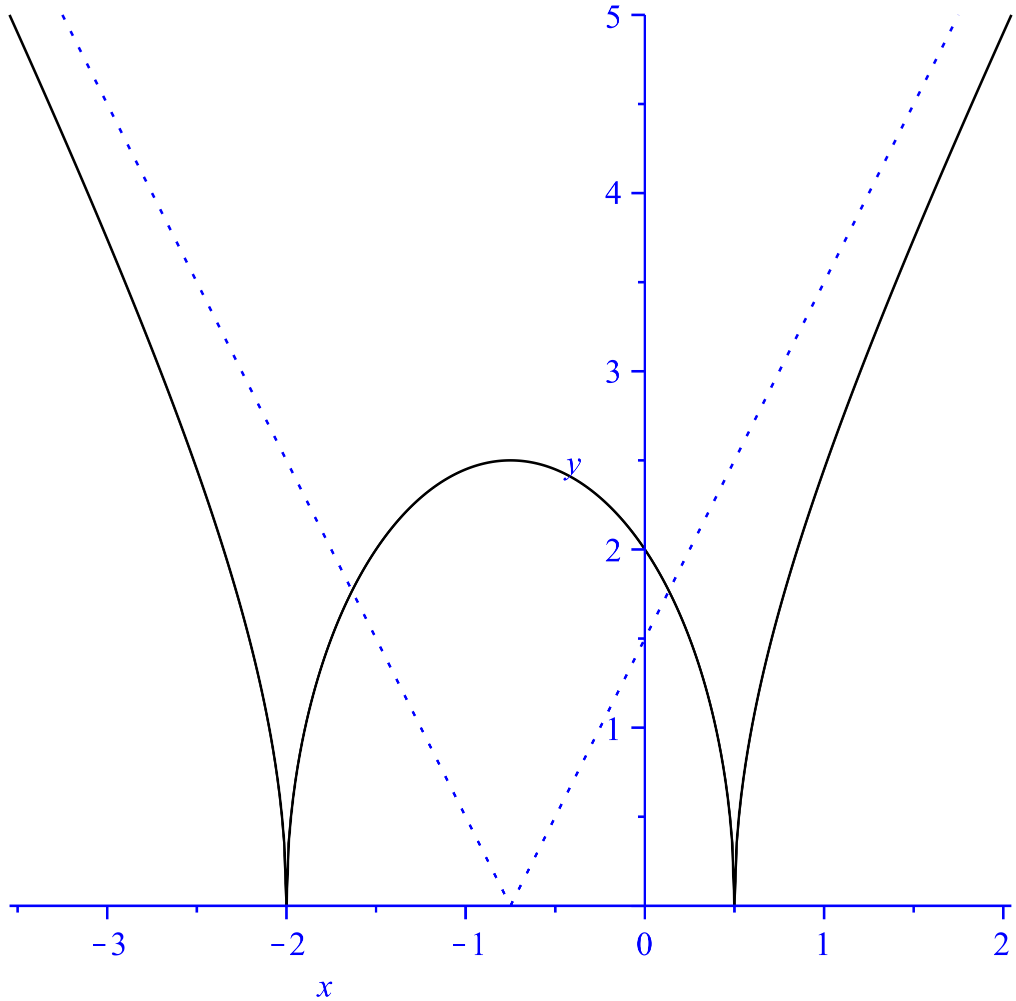

Grafico di $f(x) = \sqrt{|4x^2 + 6x - 4|}$

Esercizio 2.f. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |2x+1| + 5\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Notando che l'argomento dell'arcoseno deve essere in modulo minore o uguale a 1 abbiamo che il dominio è $D = \mathbb{R}$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = |2x+1| + o(1).$$

e quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = 2x+1$ e $y = -2x-1$.
La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{10}{1+x^2} & \text{se } x > 1, \\[2ex] 2 + \dfrac{10}{1+x^2} & \text{se } -1/2 < x < 1, \\[2ex] -2 + \dfrac{10}{1+x^2} & \text{se } -1 < x < -1/2, \\[2ex] -2 - \dfrac{10}{1+x^2} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -1, in $-1/2$ e in 1 e dove ci sono dei punti angolosi:

$$\begin{aligned} &f'_-(-1) = -7, \quad f'_+(-1) = 3, \\ &f'_-(-1/2) = 6, \quad f'_+(-1/2) = 10, \\ &f'_-(1) = 7, \quad f'_+(1) = -3. \end{aligned}$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-1, 1]$ e in $[2, +\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $[1, 2]$. Il punto $x = -1$ è un punto di minimo assoluto, mentre $x = 1$ e $x = 2$ sono rispettivamente dei punti di massimo e minimo relativo. Non ci sono punti di massimo assoluto.

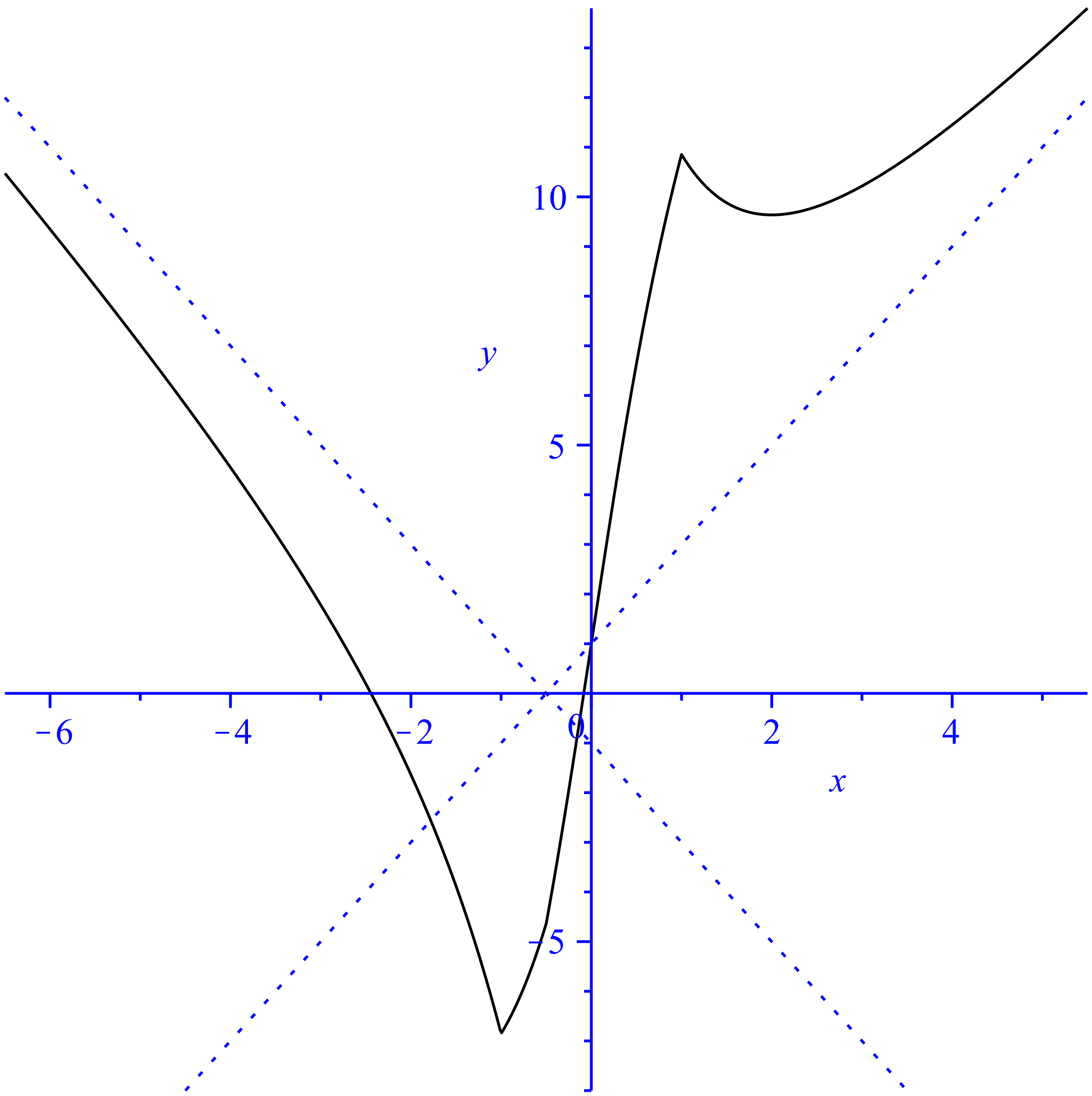

Grafico di $f(x) = |2x+1| + 5\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\pi - 3\arcsin(x/2)}{\pi - 3\arctan(x)}.$$

Il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\pi - 3\arcsin(x/2)}{\pi - 3\arctan(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{0 - \frac{3/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}}{0 - \frac{3}{1+x^2}} = \frac{-3}{-3/4} = 4.$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(5x)}{e^{-2/x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}.$$

Il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(5x)}{e^{-2/x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{0 - \frac{10}{1+25x^2}}{\frac{2e^{-2/x}}{x^2} - \frac{1}{2x^2\sqrt{1-1/x}}} \\ &= -\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{1+25x^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{-2/x} - \frac{1}{2\sqrt{1-1/x}}} \\ &= -\frac{10}{25} \cdot \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4^{1/x} + 3^{1/x}}{2}\right)^x.$$

Ponendo $t = 1/x \to 0^+$, notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4^{1/x} + 3^{1/x}}{2}\right)^x = \lim_{t\to0^+} \left(\frac{4^t + 3^t}{2}\right)^{1/t} = \lim_{t\to0^+} \exp\left(\frac{\log(4^t + 3^t) - \log(2)}{t}\right)$$

e quindi basta calcolare
$$\lim_{t\to0^+} \frac{\log(4^t + 3^t) - \log(2)}{t}.$$

Il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{t\to0^+} \frac{\log(4^t + 3^t) - \log(2)}{t} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{4^t\log(4) + 3^t\log(3)}{4^t + 3^t} = \frac{\log(4) + \log(3)}{2} = \log(\sqrt{12}).$$

Così
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4^{1/x} + 3^{1/x}}{2}\right)^x = \exp(\log(\sqrt{12})) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\cos(\pi/x)}{(\arccos(2/x))^2}.$$

Il limite è della forma $0/0$. Poniamo $t = 2/x \to 1^-$ (sostituzione non necessaria che però semplifica i conti) e applichiamo de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{\cos(\pi/x)}{(\arccos(2/x))^2} &= \lim_{t\to 1^-} \frac{\cos(\pi t/2)}{(\arccos(t))^2} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 1^-} \frac{-(\pi/2)\sin(\pi t/2)}{-\frac{2\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}} \\
&= \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} \sin(\pi t/2) \cdot \lim_{t\to 1^-} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\arccos(t)} \\
&\stackrel{\mathrm{H}}{=} \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} \frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} t = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare
$$\lim_{x\to \pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)}.$$

Notiamo che
$$(\tan(x))^{\tan(2x)} = \exp(\tan(2x)\log(\tan(x))) = \exp\left(\frac{2\tan(x)\log(\tan(x))}{1-\tan^2(x)}\right).$$

Inoltre, posto $t = \tan(x) \to \tan(\pi/4) = 1$,
$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{2\tan(x)\log(\tan(x))}{1-\tan^2(x)} = 2\lim_{t\to 1} \frac{t\log(t)}{1-t^2} \stackrel{\mathrm{H}}{=} 2\lim_{t\to 1} \frac{\log(t)+1}{-2t} = -1.$$

Così
$$\lim_{x\to \pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)} = e^{-1}.$$

Esercizio 3.f. Calcolare
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{\log(x)}\right).$$

Dopo aver effettuato la sottrazione, il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{\log(x)}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{e\log(x)-(e^x-e)}{\log(x)(e^x-e)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{e}{x}-e^x}{\frac{e^x-e}{x}+\log(x)e^x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{e-xe^x}{e^x-e+x\log(x)e^x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{0-e^x-xe^x}{e^x-0+\log(x)e^x+e^x+x\log(x)e^x}=\frac{-2e}{2e}=-1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \arcsin(x).$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \arcsin(x)$ sono

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{-1/2}, \\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-3/2}, \\ f'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = x + \frac{x^3}{6}.$$

Esercizio 4.b. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}.$$

Ricordiamo che

$$(1+t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2}\, t^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}\, t^3 + o(t^3).$$

Allora, per $t = 4x$, $a = -1/2$ e $n = 3$ abbiamo che,

$$T_3(x) = 1 - 2x + 6x^2 - 20x^3.$$

Esercizio 4.c. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x}\right).$$

Le prime quattro derivate della funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x}\right) = \log(x) - \log(2-x)$ sono

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(2-x)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} + \frac{6}{(2-x)^4}. \end{aligned}$$

Per $x_0 = 1$ e $n = 4$ abbiamo che, per definizione,

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k = 2(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

Esercizio 4.d. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{-x}}.$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \frac{1}{2-e^{-x}}$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2},\\
f''(x) &= \frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2} + \frac{2e^{-2x}}{(2-e^{-x})^3},\\
f'''(x) &= -\frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2} - \frac{6e^{-2x}}{(2-e^{-x})^3} - \frac{6e^{-3x}}{(2-e^{-x})^4}.
\end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{13x^3}{6}.$$

Esercizio 4.e Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = \pi/4$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \tan(x).$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \tan(x)$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \tan^2(x),\\
f''(x) &= 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x),\\
f'''(x) &= 2(1+\tan^2(x)) + 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)).
\end{aligned}$$

Per $x_0 = \pi/4$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(\pi/4)}{k!}\,(x-\pi/4)^k\\
&= 1 + 2(x-\pi/4) + 2(x-\pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x-\pi/4)^3.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.f Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione
$$f(x) = \log(\cos(x)).$$

Le prime quattro derivate della funzione $f(x) = \log(\cos(x))$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x),\\
f''(x) &= -1 - \tan^2(x),\\
f'''(x) &= -2\tan(x) - 2\tan^3(x),\\
f^{(4)}(x) &= -2(1 + \tan^2(x)) - 6\tan^2(x)(1 + \tan^2(x)).
\end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 4$ abbiamo che, per definizione,

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}.$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con infiniti punti stazionari.

La funzione
$$f(x) = x + \sin(x)$$
ha le proprietà richieste. f è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è
$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$
f ha infiniti punti stazionari: $x_k = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ perché $f'(x_k) = 0$. Inoltre altrove f' è positiva e quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

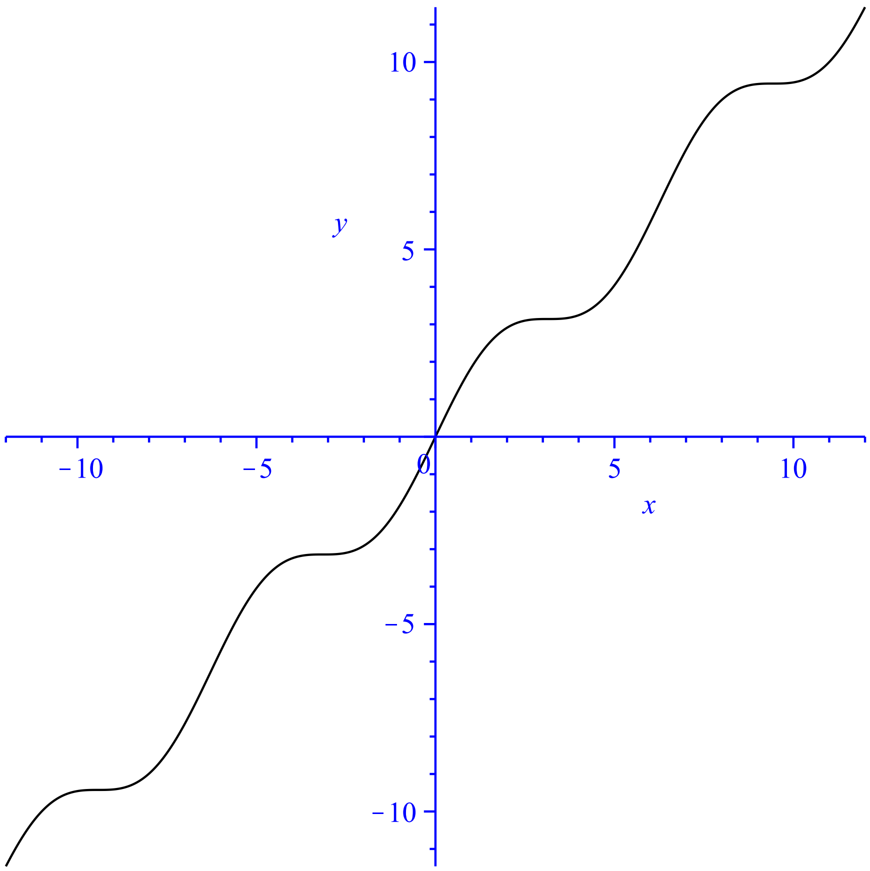

Grafico di $f(x) = x + \sin(x)$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di una funzione continua in $\mathbb{R}$ con infiniti punti di massimo, ma nessun punto stazionario.

La funzione

$$f(x) = \arcsin(\sin(x))$$

ha le proprietà richieste. f è continua e per $x \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ è derivabile con derivata

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \cos(x) > 0, \\ -1 & \text{se } \cos(x) < 0. \end{cases}$$

Quindi f non ha punti stazionari ed è lineare a tratti. Gli infiniti punti $x_k = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo.

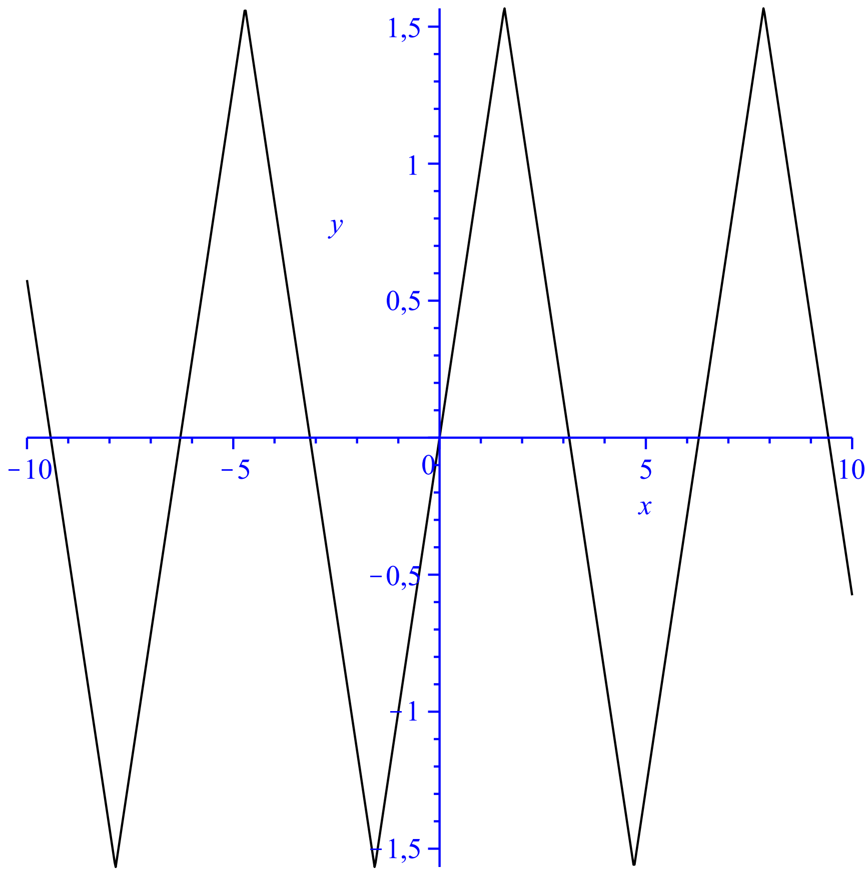

Grafico di $f(x) = \arcsin(\sin(x))$

Esercizio 5.c. Fare un esempio di una funzione f continua in $[0, 2]$ tale che $f(0) = f(2)$, ma non esiste nessun $x \in (0, 2)$ tale che $f'(x) = 0$.

La funzione

$$f(x) = |x - 1|$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $[0, 2]$, $f(0) = f(2) = 1$ ed è derivabile in $[0, 2] \setminus \{1\}$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1, \\ -1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Tale derivata non si annulla mai.

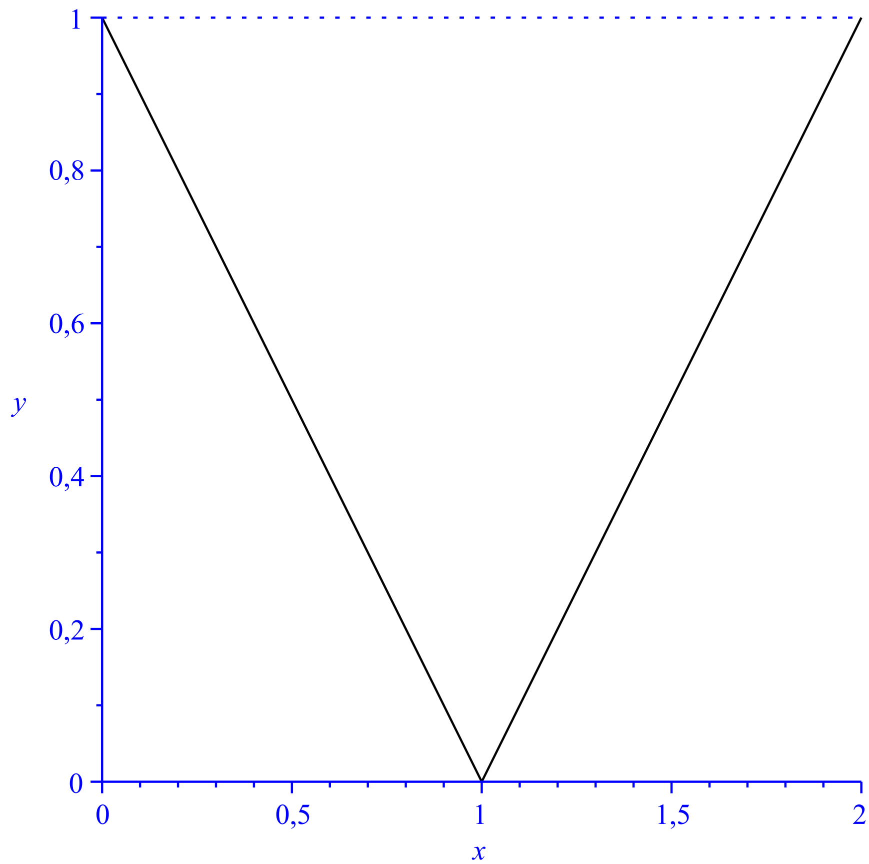

Grafico di $f(x) = |x - 1|$

Esercizio 5.d. Fare un esempio di una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

La funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 1$$

ha le proprietà richieste. f è una funzione pari, derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata

$$f(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Quindi è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, $x = 0$ è un punto di massimo assoluto dove assume il valore $f(0) = 1$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

si ha che -1 è l'estremo inferiore dell'immagine $f(\mathbb{R})$ ma non è un minimo. Quindi, per il teorema dei valori intermendi f assume tutti i valori in $(-1, 1]$, ossia $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

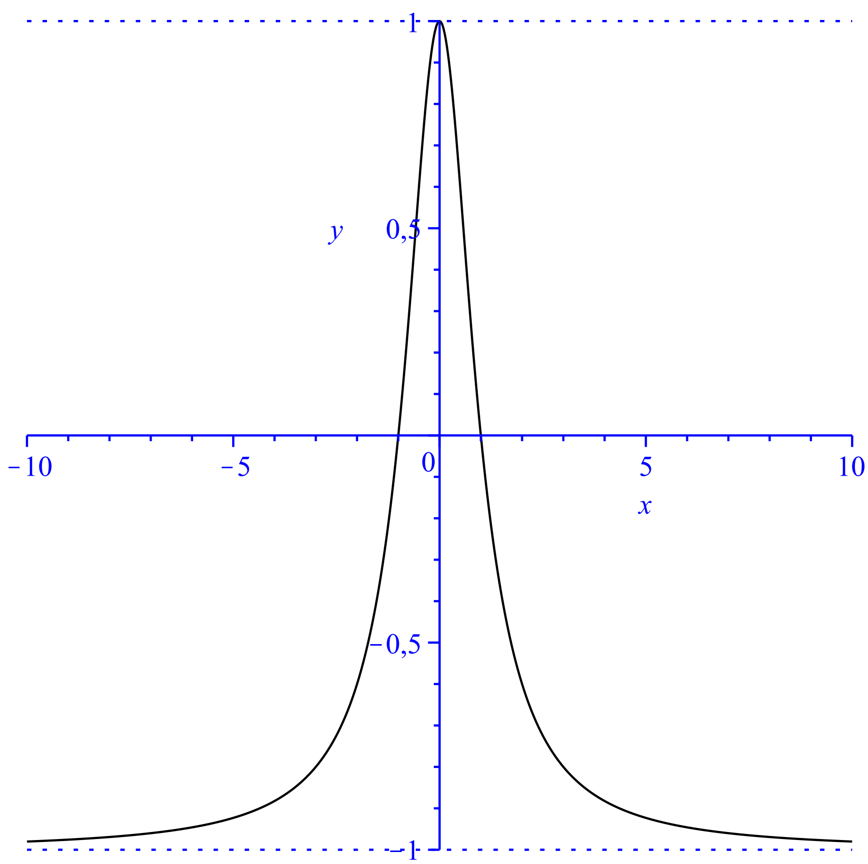

Grafico di $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1} - 1$