Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O

Foglio di esercizi n. 6

1. Per ciascuna funzione determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

a. $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + b & \text{se } x < 3, \\ ax & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$ **b.** $f(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) & \text{se } x \in [-1, 1], \\ ax + bx^2 & \text{se } x \in (1, 2), \\ \sqrt{|x-3|} & \text{se } x \in [2, 4]. \end{cases}$

2. Per ciascuna funzione f tracciarne il grafico specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

a. $f(x) = x^{1/x}$

b. $f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$

c. $f(x) = \dfrac{2|x|^3}{x^2 - 4}$

d. $f(x) = (|x+1| + 1)e^{1/x}$

e. $f(x) = \sqrt{|4x^2 + 6x - 4|}$

f. $f(x) = |2x+1| + 5\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

3. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\pi - 3\arcsin(x/2)}{\pi - 3\arctan(x)}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(5x)}{e^{-2/x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4^{1/x} + 3^{1/x}}{2}\right)^x$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\cos(\pi/x)}{(\arccos(2/x))^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{\log(x)}\right)$

4. Per ciascuna funzione determinare il polinomio di Taylor centrato in x_0 di ordine n.

a. $\arcsin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 3$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

c. $\log\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$, $x_0 = 1$, $n = 4$

d. $\dfrac{1}{2 - e^{-x}}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

e. $\tan(x)$, $x_0 = \pi/4$, $n = 3$

f. $\log(\cos(x))$, $x_0 = 0$, $n = 4$

5. Fare un esempio di:

a. una funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con infiniti punti stazionari;

b. una funzione continua in $\mathbb{R}$ con infiniti punti di massimo, ma nessun punto stazionario;

c. una funzione f continua in $[0, 2]$ tale che $f(0) = f(2)$, ma non esiste nessun $x \in (0, 2)$ tale che $f'(x) = 0$;

d. una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.