Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 5
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log(n^2+n)}}{\log(n!)}.$$

Notiamo che per $n \geq 1$,
$$2^{\log(n^2+n)} = e^{\log(n^2+n)\log(2)} = (n^2+n)^{\log(2)} \geq n^{2\log(2)} = n^{\log(4)}.$$

Inoltre $n! \leq n^n$ e dunque $n\log(n) \geq \log(n!)$. Quindi per $n \to +\infty$,
$$\frac{2^{\log(n^2+n)}}{\log(n!)} \geq \frac{n^{\log(4)}}{n\log(n)} = \frac{n^{\log(4)-1}}{\log(n)} \to +\infty$$

perché $\log(4) > 1$. Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log(n^2+n)}}{\log(n!)} = +\infty.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log(n^2+n)}}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Notiamo che per $n \geq 1$
$$2^{\log(n^2+n)} = e^{\log(n^2+n)\log(2)} = (n^2+n)^{\log(2)} = n^{2\log(2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log(2)} = n^{\log(4)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log(2)}.$$

Inoltre $\sqrt{n^3+1} \geq n^{3/2}$. Quindi per $n \to +\infty$,
$$0 < \frac{2^{\log(n^2+n)}}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{n^{\log(4)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log(2)}}{n^{3/2}} = n^{\log(4)-3/2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log(2)} \to +0$$

perché $\log(4) < 3/2$. Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log(n^2+n)}}{\sqrt{n^3+1}} = 0.$$

Esercizio 1.c. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x} &= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(2^x(1+2^{-x}))}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(2)x + \log(1+2^{-x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{3\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{x} + 4\log(2) + \frac{\log(1+2^{-x})}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \\
&\to \frac{3\cdot 0 + 4\log(2) + 0}{1+1} = 2\log(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Per $x \to -\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x} &= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} \\
&= -\frac{3\,\frac{\log(1+1/x)}{1/x} + 4\,x2^x\,\frac{\log(1+2^x)}{2^x}}{\frac{\sqrt{1+1/x^2}-1}{1/x^2}} \\
&\to -\frac{3\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1}{1/2} = -6.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{8(1+\cos(\pi/x))}{x}$$

nel punto $(2, f(2))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{-\sin(\pi/x)(-\pi/x^2)x - (1+\cos(\pi/x))}{x^2}$$

e quindi $f'(2) = \pi - 2$. Inoltre $f(2) = 4$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = (\pi - 2)x + 8 - 2\pi.$$

Esercizio 2.b. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\log(x)}{2^x + x^2}$$

nel punto $(1, f(1))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{2^x + x^2 - x\log(x)(2^x\log(2) + 2x)}{x(2^x + x^2)^2}$$

e quindi $f'(1) = 1/3$. Inoltre $f(1) = 0$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{x-1}{3}.$$

Esercizio 2.c. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{x\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

nel punto $(\pi/2, f(\pi/2))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{(\sin(x) + x\cos(x))(1+\cos(x)) + x\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

e quindi $f'(\pi/2) = (2+\pi)/2$. Inoltre $f(\pi/2) = \pi/2$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(\pi/2)(x - \pi/2) + f(\pi/2) = \frac{2+\pi}{2}\,x - \frac{\pi^2}{4}.$$

Esercizio 2.d. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

nel punto $(1, f(1))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\log(1 + 1/x) - \frac{1}{x+1}\right)$$

e quindi $f'(1) = 2\log(2) - 1$. Inoltre $f(1) = 2$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = (2\log(2) - 1)x + 3 - 2\log(2).$$

Esercizio 2.e. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$$

nel punto $(0, f(0))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos(x))^2}$$

e quindi $f'(0) = 2/\pi$. Inoltre $f(0) = 0$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{2x}{\pi}.$$

Esercizio 2.f. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\pi^2\sqrt{3 + e^x}}{\arctan(x+1)}$$

nel punto $(0, f(0))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \pi^2 \frac{e^x \arctan(x+1) - 2(3 + e^x)/(x^2 + 2x + 2)}{2\sqrt{3 + e^x}\arctan^2(x+1)}$$

e quindi $f'(0) = \pi - 16$. Inoltre $f(0) = 8\pi$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = (\pi - 16)x + 8\pi.$$

Esercizio 3.a. Data la funzione

$$f(x) = x + \sin(x)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$

Abbiamo che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos(x) \geq -1$. Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ = 0 & \text{se } x \in \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ < 0 & \text{mai.} \end{cases}$$

Esercizio 3.b. Data la funzione

$$f(x) = x^{1/x}$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = (0, +\infty)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}.$$

Così, per $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (0, e), \\ = 0 & \text{se } x = e, \\ < 0 & \text{se } x \in (e, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 3.c. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - |2x + 1|}{x^2 + 1}$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > -1/2, \\ -\dfrac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x < -1/2. \end{cases}$$

Nel punto $x = -\frac{1}{2}$ la funzione non è derivabile (la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra). Studiando il segno di f' troviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1-\sqrt{2}, -1/2) \cup (1, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1-\sqrt{2}, 1\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1/2, 1). \end{cases}$$

Esercizio 3.d. Data la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2-1)(x^2-4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)(x^2-4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2].$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 3.e. Data la funzione

$$f(x) = x \log |x|$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha che

$$f'(x) = \log |x| + 1.$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1/e] \cup [1/e, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1/e) \cup (1/e, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1/e, 1/e\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-1/e, 0) \cup (0, 1/e). \end{cases}$$

Esercizio 3.f. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x} + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Il dominio è $D = [0, +\infty)$. Per $x \in D \setminus \{0\} = (0, +\infty)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}.$$

f non è derivabile in $x = 0$. Così, per $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \in [9, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (9, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x = 9, \\ < 0 & \text{se } x \in (0, 9). \end{cases}$$

Esercizio 4.a. Fare un esempio di una successione non limitata che abbia almeno una sottosuccessione convergente.

La successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ data da

$$a_n = (1+(-1)^n)\cdot n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

soddisfa le proprietà richieste: è limitata perché $a_{2n} = 4n \to +\infty$ e ha una sottosuccessione convergente perché $a_{2n-1} = 0 \to 0$.

Esercizio 4.b. Fare un esempio di una successione che abbia almeno tre sottosuccessione convergenti a limiti finiti diversi.

La successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ data da

$$a_n = \cos(n\pi/2) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è divisibile per } 4, \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ -1 & \text{se } n-2 \text{ è divisibile per } 4, \end{cases}$$

soddisfa le proprietà richieste perché ha tre sottosuccessione convergenti a limiti finiti diversi

$$a_{4n} = 1 \to 1, \qquad a_{2n-1} = 0 \to 0, \qquad a_{4n+2} = -1 \to -1$$

.

Esercizio 4.c. Fare un esempio di una funzione continua in $(0,1)$, non limitata e con un punto di minimo assoluto.

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $(0,1)$ ed è non limitata perché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{2x-1}{(x(1-x))^2}$$

e quindi f è crescente in $[1/2,1)$ ed è decrescente in $(0,1/2]$. Ne segue che $x=1/2$ è un punto di minimo assoluto.

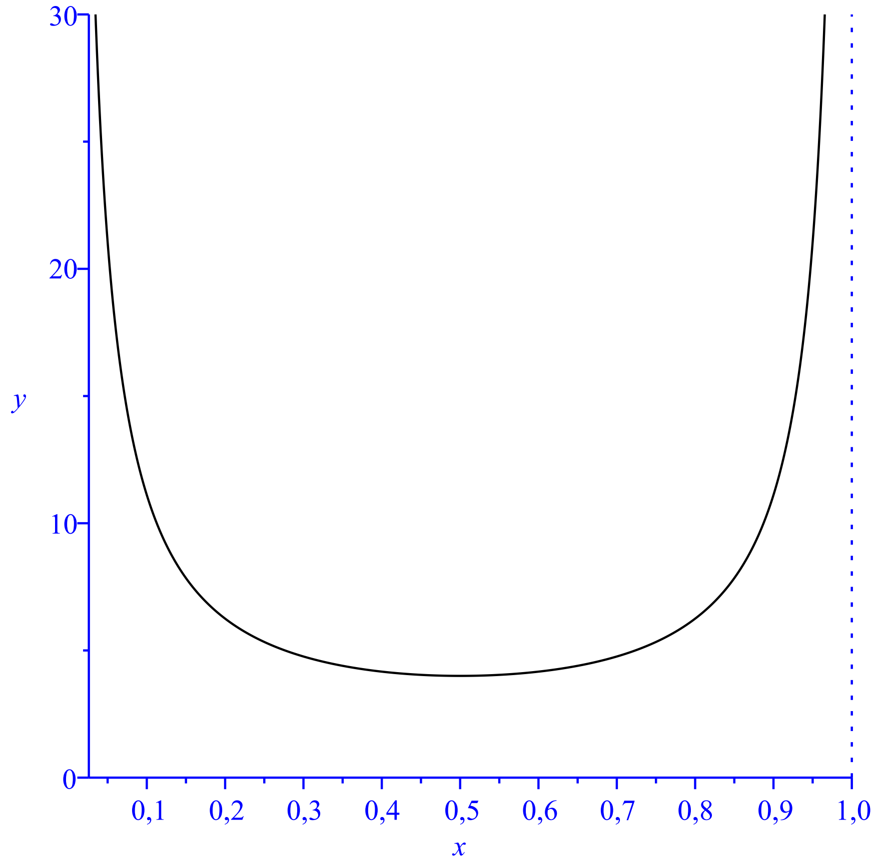

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

Esercizio 4.d. Fare un esempio di una funzione continua in $\mathbb{R}$, limitata, senza punti di massimo assoluto e punti di minimo assoluto, ma con almeno un punto di massimo relativo e almeno un punto di minimo relativo.

La funzione

$$f(x) = \arctan(x^3 - 3x)$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $\mathbb{R}$ ed è limitata perché $f(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{3(x^2-1)}{1+(x^3-3x)^2}$$

e quindi f è crescente in $(-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty)$, ed è decrescente in $[-1, 1]$. Ne segue che $x = 1$ è un punto di minimo relativo e $x = -1$ è un punto di massimo relativo. Non sono assoluti perché

$$f(1) = -\arctan(2) > \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad f(-1) = \arctan(2) < \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

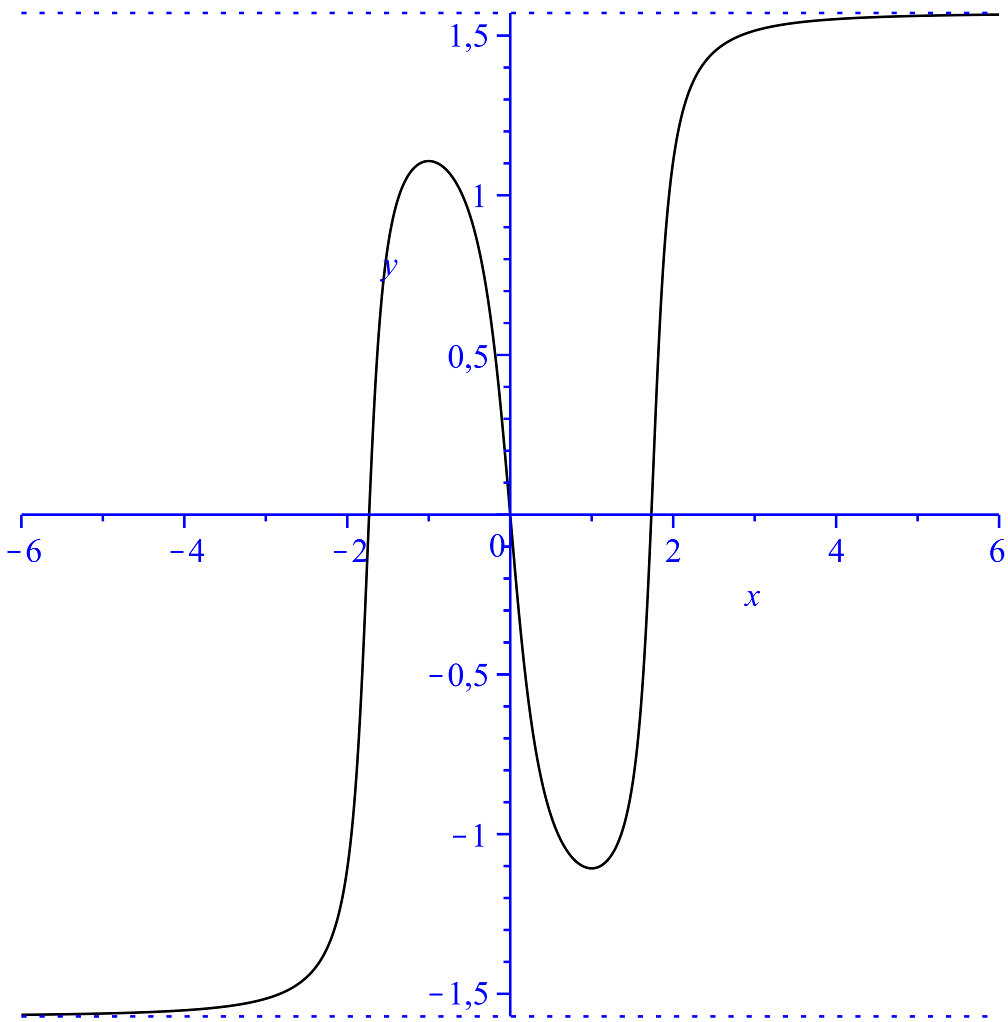

Grafico di $f(x) = \arctan(x^3 - 3x)$