Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 4
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^{n\log(n)}}.$$

Riscrivo la successione come
$$\frac{n^n}{4^{n\ln(n)}} = \frac{4^{n\log_4(n)}}{4^{n\ln(n)}} = 4^{n\log_4(n) - n\ln(n)}.$$

Così per $n \to \infty$,
$$n\log_4(n) - n\ln(n) = n\ln(n)\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(4)} - 1\right)}_{<0} \to -\infty$$

e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^{n\ln(n)}} = 0.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln(\cos(1/n)).$$

Per $n \to \infty$,
$$n^2 \ln(\cos(1/n)) = \underbrace{\frac{\ln(1 + (\cos(1/n) - 1))}{\cos(1/n) - 1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(1/n) - 1}{1/n^2}}_{\to -1/2} \to -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:
$$\begin{aligned}\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot n^{2n}}{(n+1)^2 \cdot (n+1)^{2n}} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} \to 4e^{-2} < 1.\end{aligned}$$

Possiamo così concludere che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} = 0.$$

Osservazione: ancora con il criterio del rapporto si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n^{2n}} = +\infty,$$

quindi il valore del limite di $\frac{(An)!}{n^{Bn}}$ dipende dai numeri interi positivi A e B e non solo dal fatto che si tratta di un rapporto tra un fattoriale e una potenza di n^n.

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n n!}{n^n \log(n)}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\log(n+1)} \cdot \frac{n^n \log(n)}{3^n n!} &= \frac{3n^n \log(n)}{(n+1)^n(\log(n) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right))} \\ &= \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log(n)}\right)} \to \frac{3}{e} > 1.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n n!}{n^n \log(n)} = +\infty.$$

Esercizio 1.e. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n(6^{1/n} - 3^{1/n}).$$

Ricordando che per $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a),$$

per $n \to \infty$,

$$n(6^{1/n} - 3^{1/n}) = \underbrace{3^{1/n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2^{1/n} - 1}{1/n}}_{\to \ln(2)} \to \ln(2).$$

Esercizio 1.f. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\log(n+3)}}{e^{n\log(n+1)}}.$$

Abbiamo che

$$\frac{e^{n\log(n+3)}}{e^{n\log(n+1)}} = \frac{(n+3)^n}{(n+1)^n} = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{e^3}{e} = e^2.$$

Esercizio 1.g. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2\sin(n)+2^n)}{n+\arctan(n)}.$$

Per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n^2\sin(n)+2^n)}{n+\arctan(n)} &= \frac{\ln(2^n)+\ln(1+\frac{n^2\sin(n)}{2^n})}{n\left(1+\frac{\arctan(n)}{n}\right)}\\ &= \frac{\ln(2)+\frac{1}{n}\ln(1+\frac{n^2\sin(n)}{2^n})}{1+\frac{\arctan(n)}{n}} \to \ln(2)\end{aligned}$$

in quanto
$$\frac{n^2\sin(n)}{2^n} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{\arctan(n)}{n} \to 0.$$

Esercizio 1.h. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}}-1\right).$$

Ricordando che per $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a,$$
per $n \to \infty$,
$$n\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}}-1\right) = \underbrace{\frac{\left(1+\frac{-5}{n+4}\right)^{1/2}-1}{\frac{-5}{n+4}}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{-5n}{n+4}}_{\to -5} \to -\frac{5}{2}.$$

Esercizio 1.i. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

Per $n \to \infty$,

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1/2}-1}{-1/\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.j. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{8+\sin(2/n)}-2\right).$$

Per $n\to\infty$,

$$n\left(\sqrt[3]{8+\sin(2/n)}-2\right)=\frac{2}{4}\cdot\underbrace{\frac{\left(1+\frac{\sin(2/n)}{8}\right)^{1/3}-1}{\frac{\sin(2/n)}{8}}}_{\to 1/3}\cdot\underbrace{\frac{\sin(2/n)}{2/n}}_{\to 1}\to\frac{1}{6}.$$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin(3^x-1)}.$$

Per $x \to 0$
$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(3^x-1)} = \underbrace{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{x}{3^x-1}}_{\to 1/\ln(3)} \cdot \underbrace{\frac{3^x-1}{\sin(3^x-1)}}_{\to 1} \to \frac{2}{\ln(3)}.$$

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2^x-1)}{\log(1+2x^2)}.$$

Per $x \to 0^+$
$$\frac{\sin(2^x-1)}{\ln(1+2x^2)} = \underbrace{\frac{\sin(2^x-1)}{2^x-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2^x-1}{x}}_{\to \ln(2)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{2x^2}{\ln(1+2x^2)}}_{\to 1} \to +\infty.$$

Esercizio 2.c. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan(2x^3)-x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x})-1)}.$$

Per $x \to 0$
$$\frac{2\arctan(2x^3)-x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x})-1)} = \frac{4\,\frac{\arctan(2x^3)}{2x^3}-1}{-9\,\frac{1-\cos(3\sqrt{x})}{9x}} \to \frac{4-1}{-9\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Esercizio 2.d. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x^2)^\pi-1}{(1+x)^3+(1-x)^3-2}.$$

Dopo aver semplificato il denominatore si ottiene
$$\frac{(1+2x^2)^\pi-1}{6x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+2x^2)^\pi-1}{2x^2} \to \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 2.e. Calcolare
$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(2)-\log(x)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}.$$

Per $x \to 2$,
$$\frac{\log(2/x)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{\log(1+(2/x-1))}{2/x-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2/x-1}{2-x}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{x})}_{\to 2\sqrt{2}} \to \sqrt{2}.$$

Esercizio 2.f. Calcolare
$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(1+e^x-e^2)+2\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x}-2}.$$

Considero separatamente i limiti
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+e^x-e^2)}{\sqrt{2x}-2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} \frac{2\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x}-2}.$$

Se i due limiti esistono e sono finiti, allora il limite richiesto è la somma dei due limiti. Per il primo,
$$\frac{\ln(1+e^x-e^2)}{\sqrt{2x}-2} = \underbrace{\frac{\ln(1+e^x-e^2)}{e^x-e^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{2(x-2)}}_{\to e/2} \cdot \underbrace{(\sqrt{2x}+2)}_{\to 4} \to 2e^2.$$

Per il secondo,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{2\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x}-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{2\cos(\pi/x)}{2(x-2)} \cdot (\sqrt{2x}+2) = 4\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x-2} \\ &= 4\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{\frac{4t}{\pi-2t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot (\pi-2t) = \pi\end{aligned}$$

dove $t = \pi/2 - \pi/x$. Così
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+e^x-e^2)+2\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x}-2} = 2e^2+\pi.$$

Esercizio 2.g. Calcolare
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{-1/x}+\sin(x)\right).$$

Sia $f(x) = x(e^{-1/x}+\sin(x))$ allora
$$\lim_{n\to\infty} f(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} 2\pi n(e^{-1/(2\pi n)}+0) = +\infty.$$

Quindi se il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ esiste, deve essere $+\infty$.
D'altra parte $2\pi n + 3\pi/2 \to +\infty$, ma
$$f(2\pi n+3\pi/2) = (2\pi n+3\pi/2)(\underbrace{e^{-1/(2\pi n+3\pi/2)}}_{<1}-1) < 0$$

e quindi lungo tale successione la funzione non può divergere a $+\infty$.
Possiamo così concludere che il limite richiesto non esiste.

Esercizio 2.h. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^{1-\frac{1}{x}}-x}.$$

Abbiamo che per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x^2+1)}{x^{1-\frac{1}{x}}-x} &= \frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x(e^{-\ln(x)/x}-1)} = \frac{2\ln(x)+\ln(1+1/x^2)}{x(e^{-\ln(x)/x}-1)} \\
&= \underbrace{\frac{2\ln(x)+\ln(1+1/x^2)}{\ln(x)}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\frac{\ln(x)/x}{e^{-\ln(x)/x}-1}}_{\to -1} \to -2.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.i. Calcolare
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\left|(x-1)\sqrt{|x-5|}-\sin(|x-5|-2x-2)\right|}{x^2+x-2}.$$

Per $x \to 1^-$, abbiamo che $t = x-1 \to 0^-$ e possiamo supporre che $t \in (-1,0)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\left|(x-1)\sqrt{|x-5|}-\sin(|x-5|-2x-2)\right|}{x^2+x-2} &= \frac{\left|t\sqrt{4-t}-\sin((4-t)-2t-4)\right|}{t(t+3)} \\
&= \frac{\left|t\sqrt{4-t}+\sin(3t)\right|}{t(t+3)} \\
&= -\frac{t\sqrt{4-t}+\sin(3t)}{t(t+3)} \\
&= -\left(\underbrace{\frac{\sqrt{4-t}}{t+3}}_{\to 2/3} + \underbrace{\frac{\sin(3t)}{t(t+3)}}_{\to 3/3}\right) \to -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$