Analisi Matematica 1 - Canale Lj-O
Foglio di esercizi n. 3
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n \cdot n! - 5^n \cdot n^n}{n^5 + n^{2n}}.$$

Abbiamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n n! - 5^n n^n}{n^5 + n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{10^n}{n^n}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{n!}{n^n}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{5^n}{n^n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{n^5}{n^{2n}}}_{\to 0} + 1} = 0.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\log(3^n - 1)}.$$

Dato che $2 - \cos(n!) \geq 1$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\ln(3^n - 1)} \geq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{\to +\infty} \cdot \frac{1 - \overbrace{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}}{\ln(3) + \underbrace{\frac{\log(1 - 1/3^n)}{n}}_{\to 0}} = +\infty$$

e per confronto il limite dato vale $+\infty$.

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4}.$$

Sviluppando le potenze al numeratore e al denominatore otteniamo che per $n \to \infty$,
$$\frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4} = \frac{-n^5 + 25n^4 + p(n) + n^5}{n^4 + q(n) + n^4} = \frac{25 + \overbrace{\frac{p(n)}{n^4}}^{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{q(n)}{n^4}}_{\to 0}} \to \frac{25}{2}$$

dove $p(n)$ e $q(n)$ sono due polinomi di terzo grado.

Esercizio 1.d. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right).$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right) &= \frac{(2^{2n} - n)(2^n - n) - (2^{2n} + n)(2^n + n)}{n(2^{2n} - n^2)}\\ &= -\frac{2^{2n+1}n}{n(2^{2n} - n^2)}.\end{aligned}$$

Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1 - n^2/2^{2n}} = -2.$$

Esercizio 1.e. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+3)}{\log(n^3+2)}.$$

Per $n \to \infty$,
$$\frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n^3+2)} = \frac{2 + \frac{\ln(1+3/n^2)}{\ln(n)}}{3 + \frac{\ln(1+2/n^3)}{\ln(n)}} \to \frac{2}{3}.$$

Esercizio 1.f. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n n}{n^2+1}.$$

La successione $a_n = \frac{(-2)^n n}{n^2+1}$ non ha limite. Infatti considerando le sottosuccessione generata dai numeri pari e quella generata dai numeri dispari, otteniamo limiti diversi
$$a_{2n} = \frac{4^n(2n)}{(2n)^2+1} \to +\infty \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{-2\cdot 4^n(2n+1)}{(2n+1)^2+1} \to -\infty.$$

Esercizio 1.g. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}}.$$

Abbiamo che per $n \to \infty$,
$$\sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}} = 3\cdot\sqrt[n]{\frac{(2/3)^n + 1}{n^3(1/n + 1)}} = 3\cdot\frac{\sqrt[n]{1 + (2/3)^n}}{(\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1 + 1/n}} \to 3$$

in quanto

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \to 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a_n} = \exp\left(\frac{\log(a_n)}{n}\right) \to 1$$

se $a_n \to L > 0$.

Esercizio 1.h. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n}.$$

Ricordando che per $n \geq 1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}}_{\geq 0} \geq 2$$

abbiamo

$$\sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = n \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1} \geq n\sqrt[n]{2-1} = n$$

e quindi per confronto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = +\infty.$$

Esercizio 1.i. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n+7}}.$$

Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore, si ha che per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n+7}} &= \frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+7}}{\sqrt{9n+1} + \sqrt{9n+8}} \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1-1/(4n))} + \sqrt{1+7/(4n)}}{\sqrt{1+1/(9n)} + \sqrt{1+8/(9n)}} \to \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.j. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)}.$$

Dividendo sia il numeratore che il denominatore per $(2n)!$, si ha che per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)} &= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1) - 1}{n^2((2n+1) - 1)} \\ &= \frac{n^3\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 1}{2n^3} \to \frac{8}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.k. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!}.$$

Applicando il criterio del rapporto,
$$\frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{4^n n!}{n^n} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{4} < 1$$

e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!} = 0.$$

Esercizio 1.l. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto,
$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4}{e} > 1$$

e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} = +\infty.$$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n\cdot\underbrace{\frac{\ln(1-\frac{2}{\sqrt{n}})}{-\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{\to 1}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)\to 0$$
perché l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$.

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\sqrt{n}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+2/n)}{2/n}}_{\to 1}\cdot(2/n)\right)\to 1$$
perché l'argomento dell'esponenziale tende a 0.

Esercizio 2.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}} = \left(\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}}\right)^4\to e^4.$$

Esercizio 2.d. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+4}{2n^2-3n+6}\right)^{3n+2}.$$

Per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n^2+5n+4}{2n^2-3n+6}\right)^{3n+2} &= \exp\left((3n+2)\cdot\frac{\ln(1+\frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}}\cdot\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}\right)\\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{(3n+2)(8n-2)}{2n^2-3n+6}}_{\to 12}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}}}_{\to 1}\right)\to e^{12}\end{aligned}$$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n! \leq n^n \leq 2^n \cdot (n!)^2$$

e calcolare i seguenti limiti

$$\textbf{a.} \quad \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2} \qquad\qquad \textbf{b.} \quad \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n}.$$

Proviamo prima la doppia disuguaglianza

$$\forall n \geq 1, \qquad n! \leq n^n \leq 2^n (n!)^2.$$

Per la prima basta notare che ogni fattore di $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ è minore o uguale ad ogni fattore di $n^n = n \cdot n \cdots n \cdot n$.
La seconda la dimostriamo per induzione. Vale per $n = 1$.
Per il passo induttivo, facciamo vedere che se $n \geq 1$ e $n^n \leq 2^n(n!)^2$ allora

$$(n+1)^{n+1} \leq 2^{n+1}((n+1)!)^2.$$

Ricordando che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$,

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot n^n \\ &\leq (n+1) \cdot e \cdot 2^n (n!)^2 \leq 2^{n+1}((n+1)!)^2\end{aligned}$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo usato $e < 4 \leq 2(n+1)$.

a. Per la prima disuguaglianza di cui sopra

$$1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} \to 1$$

e dunque per il doppio confronto

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2} = 1.$$

b. Per la seconda disuguaglianza di cui sopra

$$(n!)^{1/n} \geq \left(\frac{n^n}{2^n}\right)^{1/(2n)} = \sqrt{n/2} \to +\infty$$

e dunque, per confronto,

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = +\infty.$$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 2\sqrt{n}$$

e calcolare i seguenti limiti

$$\textbf{a.} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad\qquad \textbf{b.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Proviamo la prima disuguaglianza per induzione

$$\forall n \ge 1, \qquad \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Vale per $n = 1$ perché $\ln(2) \le 1$. Per il passo induttivo, se $n \ge 1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \ge \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}$$

e dunque basta ancora verificare che

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \ge \ln(n+2) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \ge \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow e \ge \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

che vale perché $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e$.

Proviamo la seconda disuguaglianza per induzione

$$\forall n \ge 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 2\sqrt{n}.$$

Vale per $n = 1$ perché $2 \ge 1$. Per il passo induttivo, se $n \ge 1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \le 2\sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$$

e dunque basta ancora verificare che

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \le 2\sqrt{n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \le 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \le 2(n+1) \end{aligned}$$

che vale perché $\sqrt{n} \le \sqrt{n+1} \le n+1$.

a. Per la prima disuguaglianza di cui sopra

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

e dunque, dato che $\ln(n) \to +\infty$, per confronto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

b. Per la seconda disuguaglianza di cui sopra

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

e dunque, dato che $\frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$ per il doppio confronto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0.$$