Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 27 Gennaio 2021 - III

Esercizio 1. **[8 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{Ax^2}-Ax\arctan(x)\right)^{-\frac{1}{Ax^4}}$$

con $A\neq 0$.

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t\to 0$:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3),\quad \log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad \arctan(t)=t-\frac{t^3}{3}+o(t^4).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\log\Big(e^{Ax^2}-Ax\arctan(x)\Big)&=\log\Big(1+Ax^2+\frac{A^2x^4}{2}-Ax\big(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\big)\Big)\\&=\log\Big(1+Ax^2+\frac{A^2x^4}{2}-Ax^2+\frac{Ax^4}{3}+o(x^5)\Big)\\&=\log\Big(1+\frac{(3A^2+2A)x^4}{6}+o(x^5)\Big)\\&=\frac{A(3A+2)x^4}{6}+o(x^5)\end{aligned}$$

da cui segue

$$\Big(e^{Ax^2}-Ax\arctan(x)\Big)^{-\frac{1}{Ax^4}}=\exp\Big(-\frac{1}{Ax^4}\log\Big(e^{Ax^2}-Ax\arctan(x)\Big)\Big)=\exp\Big(-\frac{3A+2}{6}+o(x)\Big).$$

Così si conclude che

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{Ax^2}-Ax\arctan(x)\right)^{-\frac{1}{Ax^4}}=e^{-(3A+2)/6}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - A^2)\log(|x^2 - A^2|) - x^2$$

per $A > 1$, specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Per il dominio dobbiamo imporre che $x^2 - A^2 \neq 0$ ossia $x \neq \pm A$ da cui

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-A, A\}\,.$$

Dato che la funzione f è pari, possiamo supporre $x \geq 0$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to A^+} f(x) = \lim_{x\to A^-} f(x) = -A^2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

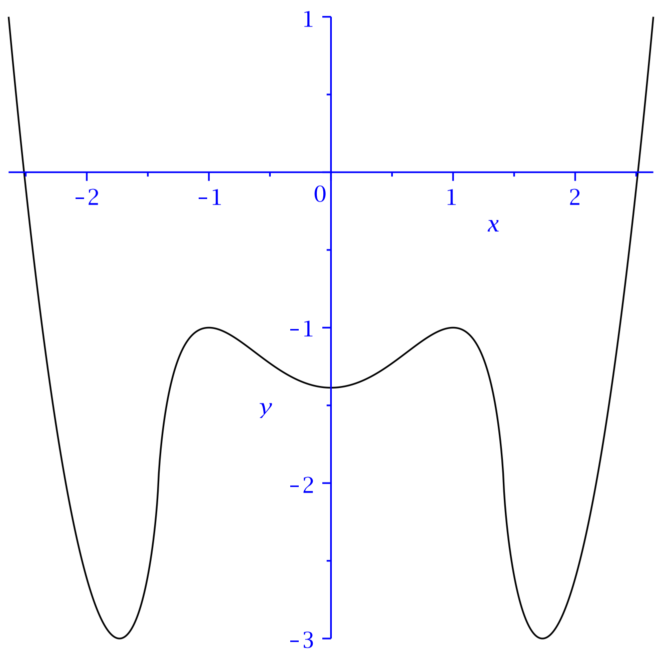
Ne segue che f non ammette asintoti.
Derivata prima. Per $x \in [0, A) \cup (A, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x\log(|x^2 - A^2|) + (x^2 - A^2)\frac{2x}{x^2 - A^2} - 2x = 2x\log(|x^2 - A^2|)$$

pertanto per $x \geq 0$, f è crescente in $[0, \sqrt{A^2-1}]$ e in $[\sqrt{A^2+1}, +\infty)$ e f è decrescente per $[\sqrt{A^2-1}, \sqrt{A^2+1}]$. Quindi $x = 0$ è un punto di minimo relativo, $x = \pm\sqrt{A^2-1}$ sono punti di massimo relativo e $x = \pm\sqrt{A^2+1}$ sono punti di minimo assoluto con

$$f(0) = -2A^2\log(A), \quad f(\sqrt{A^2-1}) = 1 - A^2, \quad f(\sqrt{A^2+1}) = -A^2 - 1$$

Si noti che $\lim_{x\to\pm A} f'(x) = \mp\infty$.



Caso $A = \sqrt{2}$: grafico di $f(x) = (x^2 - 2)\log(|x^2 - 2|) - x^2$.

Esercizio 3. **[8 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio per $A > 0$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\sin(Ax)}{(\cos(Ax) + \sin^2(Ax) - 1)^\alpha}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\sin(Ax)}{(\cos(Ax) + \sin^2(Ax) - 1)^\alpha}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\sin(Ax)}{(\cos(Ax) - \cos^2(Ax))^\alpha}\, dx.$$

I punti da indagare sono 0^+ e $\left(\frac{\pi}{2A}\right)^-$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{\sin(Ax)}{(\cos(Ax))^\alpha (1 - \cos(Ax))^\alpha} \sim 2^\alpha \frac{Ax}{(Ax)^{2\alpha}} = \frac{2^\alpha}{(Ax)^{2\alpha - 1}}.$$

e quindi l'integrale di f su $(0, \frac{\pi}{4a})$ è convergente se e solo se $2\alpha - 1 < 1$ ossia $\alpha < 1$.
Per $x \to \left(\frac{\pi}{2A}\right)^-$, sia $t = \frac{\pi}{2A} - x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{\sin(Ax)}{(\cos(Ax))^\alpha (1 - \cos(Ax))^\alpha} \sim \frac{1}{(\cos(Ax))^\alpha} = \frac{1}{(\sin(At))^\alpha} \sim \frac{1}{A^\alpha t^\alpha}$$

e quindi l'integrale di f su $(\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{2a})$ se e solo se $\alpha < 1$.
Così l'integrale dato è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1/2$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\sin(Ax)}{\sqrt{\cos(Ax) - \cos^2(Ax)}}\, dx.$$

Con la sostituzione $\cos(Ax) = t$ e, successivamente, $\sqrt{t} = s$, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\sin(Ax)}{\sqrt{\cos(Ax) - \cos^2(Ax)}}\, dx = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^2}} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$$

$$= \frac{2}{A} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{2}{A} \left[\arcsin(s)\right]_0^1 = \frac{\pi}{A}.$$

Esercizio 4. **[6 punti]** Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm\frac{\pi}{4}$ della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5), \qquad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Ponendo $t = x - (\pm\frac{\pi}{4})$, si ha che

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} = \frac{1}{\sin(2t \pm \frac{\pi}{2})} = \frac{\pm 1}{\cos(2t)}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(2t)} &= \frac{1}{1 - \frac{4t^2}{2} + \frac{16t^4}{24} + o(t^5)} \\ &= 1 - \left(-2t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^5)\right) + \Big(-2t^2 + o(t^3)\Big)^2 + o(t^5) \\ &= 1 + 2t^2 - \frac{2t^4}{3} + 4t^4 + o(t^5) = 1 + 2t^2 + \frac{10t^4}{3} + o(t^5).\end{aligned}$$

Ne segue che il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm\frac{\pi}{4}$ di f è

$$T_4(x) = \pm\left(1 + 2\Big(x \mp \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{10}{3}\Big(x \mp \frac{\pi}{4}\Big)^4\right).$$