Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 27 Gennaio 2021 - I

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+Bx)^{1+Bx} - \sqrt{1+2Bx}}{Ax^2 + \log(1+x^3)}$$

con $A \neq 0$ e $B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\log(1+t) = t + o(t), \quad e^t = 1 + t + o(t), \quad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
(1+Bx)^{1+Bx} &= (1+Bx)(1+Bx)^{Bx} = (1+Bx)\exp\left(Bx\log(1+Bx)\right) \\
&= (1+Bx)\exp\left(Bx\Big(Bx + o(x)\Big)\right) = (1+Bx)\exp\left(B^2x^2 + o(x^2)\right) \\
&= (1+Bx)\left(1 + B^2x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + Bx + B^2x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

e

$$\sqrt{1+2Bx} = 1 + \frac{2Bx}{2} - \frac{4B^2x^2}{8} + o(x^2) = 1 + Bx - \frac{B^2x^2}{2} + o(x^2),$$

da cui segue

$$(1+Bx)^{1+Bx} - \sqrt{1+2Bx} = \frac{3B^2x^2}{2} + o(x^2).$$

Inoltre

$$Ax^2 + \log(1+x^3) = Ax^2 + o(x^2).$$

Così si conclude che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+Bx)^{1+Bx} - \sqrt{1+2Bx}}{Ax^2 + \log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3B^2x^2}{2} + o(x^2)}{Ax^2 + o(x^2)} = \frac{3B^2}{2A}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2Ax - \log(|e^{Ax} - 1|)$$

per $A > 0$ specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Per il dominio dobbiamo imporre che $e^{Ax} - 1 \neq 0$ ossia $x \neq 0$ da cui $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Quindi $x = 0$ è un asintoto verticale.
Inoltre per $x \to +\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = Ax$:

$$f(x) = 2Ax - \log(e^{Ax} - 1) = 2Ax - Ax - \log(1 - e^{-Ax}) = Ax + o(1).$$

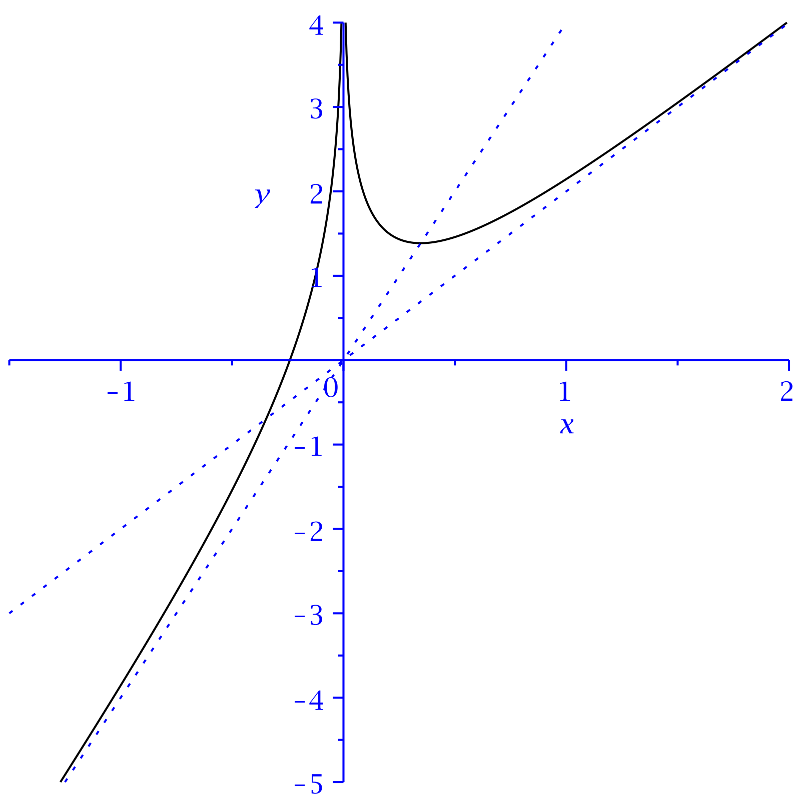
Mentre per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 2Ax$:

$$f(x) = 2Ax - \log(1 - e^{Ax}) = 2Ax + o(1).$$

Derivata prima. Per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2A - \frac{Ae^{Ax}}{e^{Ax} - 1} = \frac{A(e^{Ax} - 2)}{e^{Ax} - 1}$$

pertanto f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $\left[\frac{\log(2)}{A}, +\infty\right)$ e f è decrescente in $\left(0, \frac{\log(2)}{A}\right]$. Quindi $x = \frac{\log(2)}{A}$ è un punto di minimo relativo con $f\left(\frac{\log(2)}{A}\right) = 2\log(2)$. Non ci sono massimi o minimi assoluti.



Caso $A = 2$: grafico di $f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|)$.

Esercizio 3. **[8 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}}{\sqrt{|1 - e^{\alpha x}|}}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = -A$ con $A > 0$.

Svolgimento. I punti da indagare sono 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{|\alpha| x}}$$

e quindi l'integrale di f su $(0, 1)$ è convergente se e solo se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Per $x \to +\infty$,

$$f \sim e^{2\alpha x} \text{ se } \alpha < 0, \qquad f \sim \frac{e^{2\alpha x}}{e^{\frac{\alpha}{2} x}} = e^{\frac{3}{2}\alpha x} \text{ se } \alpha > 0$$

e quindi l'integrale di f su $(1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha < 0$.
Così l'integrale dato è convergente se e solo se $\alpha < 0$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -A$ con $A > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2Ax}}{\sqrt{1 - e^{-Ax}}}\, dx.$$

Con la sostituzione $t = e^{-Ax}$, $\log(t) = -Ax$, $dx = -\frac{dt}{At}$, e poi ponendo $s = \sqrt{1-t}$, $t = 1 - s^2$, $dt = -2sds$, l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2Ax}}{\sqrt{1 - e^{-Ax}}}\, dx &= \int_1^0 \frac{t^2}{\sqrt{1-t}} \left(-\frac{dt}{At}\right) = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}}\, dt \\
&= \frac{1}{A} \int_1^0 \frac{1 - s^2}{s} \, (-2sds) = \frac{2}{A} \int_0^1 (1 - s^2)\, ds \\
&= \frac{2}{A} \left[s - \frac{s^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3A}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x)\tan(Ax) \\ y\left(\dfrac{\pi}{A}\right) = -A \end{cases}$$

con $A > 0$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è a variabili separabili con $y = 0$ come soluzione stazionaria. Se $y(x) \neq 0$, separando e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \tan(Ax)\,dx.$$

Svolgendo il primo integrale si trova

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c.$$

Mentre per il secondo integrale si ha

$$\int \tan(Ax)\,dx = \int \frac{\sin(Ax)}{\cos(Ax)}\,dx = -\frac{1}{A}\int \frac{d(\cos(Ax))}{\cos(Ax)} = -\frac{1}{A}\log(|\cos(Ax)|) + c.$$

Quindi otteniamo

$$-\frac{1}{y(x)} = -\frac{1}{A}\log(|\cos(Ax)|) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{A}) = -A$ si ottiene

$$-\frac{1}{-A} = -\frac{1}{A}\log(|\cos(\pi)|) + c \implies c = \frac{1}{A}.$$

Così la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{A}{\log(|\cos(Ax)|) - 1} \qquad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2A}, \frac{3\pi}{2A}\right).$$