Analisi Matematica 1

C. L. Ingegneria - Università di Roma "Tor Vergata"
Prova scritta online - 1 Settembre 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1. Per $A > 0$ calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x}}{Ax - Be^{-\frac{1}{x}}}.$$

Dato che per $t \to 0$,

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{e} \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

ne segue che per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \exp\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}\right) = \exp\left(\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\sqrt{x}}\right) \\
&= e^{\sqrt{x}+o(x)} = 1 + (\sqrt{x} + o(x)) + \frac{(\sqrt{x}+o(x))^2}{2} + o(x) \\
&= 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x).
\end{aligned}$$

Inoltre, posto $y = 1/x$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Così possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x}}{Ax - Be^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x\Big(A - B\underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}}_{\to 0}\Big)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{A + o(1)} = \frac{1}{2A}.$$

Esercizio 2. Per $A > 0$ determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza della seguente funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x - A\sqrt{|x|}}\right).$$

La funzione è continua nel dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{0, A^2\}$.

i) Per $x > 0$ e $x \neq A^2$,

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x - A\sqrt{x}}\right) \cdot -\frac{1 - \frac{A}{2\sqrt{x}}}{(x - A\sqrt{x})^2}.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia

$$\begin{cases} x > 0,\ x \neq A^2 \\ -1 + \frac{A}{2\sqrt{x}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \neq A^2 \\ x \leq \frac{A^2}{4} \end{cases}$$

si ottiene che f è crescente in $(0, A^2/4]$ e f è decrescente in $[A^2/4, A^2)$ e in $(A^2, +\infty)$.

ii) Per $x < 0$,

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x - A\sqrt{-x}}\right) \cdot -\frac{1 + \frac{A}{2\sqrt{-x}}}{(x - A\sqrt{-x})^2}.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia

$$\begin{cases} x < 0 \\ -1 - \frac{A}{2\sqrt{-x}} \geq 0 \quad \text{(sempre falsa)} \end{cases}$$

si ottiene che f è decrescente in $(-\infty, 0)$.

Riassumendo, f è crescente in $(0, A^2/4]$ e f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $[A^2/4, A^2)$ e in $(A^2, +\infty)$.

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{A + x\log(x)}{x^3}$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{A + x\log(x)}{x^3}\, dx.$$

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int \frac{A + x\log(x)}{x^3}\, dx &= -\frac{A}{2x^2} + \int \frac{\log(x)}{x^2}\, dx \\
&= -\frac{A}{2x^2} + \int \log(x) \left(-\frac{1}{x}\right)'\, dx \\
&= -\frac{A}{2x^2} - \frac{\log(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= -\frac{A}{2x^2} - \frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x} + c.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale improprio vale

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{A + x\log(x)}{x^3}\, dx &= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{A}{2x^2} - \frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{A}{2} - 0 - 1\right) \\
&= 0 + \frac{A}{2} + 1 = \frac{A}{2} + 1.
\end{aligned}$$