Analisi Matematica 1

C. L. Ingegneria - Università di Roma "Tor Vergata"

Prova scritta online - 13 Luglio 2020

SOLUZIONI

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}(n+A)^{2n-1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)^n.$$

Dato che per $t \to 0$,

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{e} \quad e^t = 1 + t + o(t),$$

ne segue che per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)^n &= n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}-1\right)^n = n\left(e^{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right)^n \\
&= n\left(e^{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(1/n^2)\right)}-1\right)^n = n\left(e^{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o(1/n^3)}-1\right)^n \\
&= n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o(1/n^3)-1\right)^n = \frac{1}{n^{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)^n.
\end{aligned}$$

Così possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty}(n+A)^{2n-1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{A}{n}\right)^{2n-1}}_{\to e^{2A}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)^n}_{\to e^{-1/2}} = e^{2A-\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 2. Per $A > 0$ determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza della seguente funzione
$$f(x) = \sqrt{|x^2 - A^2|} - x + A.$$

La funzione è continua nel dominio $\mathbb{R}$. Inoltre è derivabile per $x \neq \pm A$.

i) Per $|x| > A$,
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - A^2}} - 1.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia
$$\begin{cases} |x| > A \\ x \geq \sqrt{x^2 - A^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > A \\ x^2 \geq x^2 - A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > A \\ 0 \geq -A^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A, +\infty)$$

si ottiene che f è crescente in $[A, +\infty)$ e f è decrescente in $(-\infty, -A]$.

ii) Per $|x| < A$,
$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{A^2 - x^2}} - 1.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia
$$\begin{cases} |x| < A \\ -x \geq \sqrt{A^2 - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A < x \leq 0 \\ x^2 \geq A^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A < x \leq 0 \\ x^2 \geq A^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-A, -A/\sqrt{2}]$$

si ottiene che f è crescente in $[-A, -A/\sqrt{2}]$ e f è decrescente in $[-A/\sqrt{2}, A]$.

Riassumendo, f è crescente in $[-A, -A/\sqrt{2}]$ e in $[A, +\infty)$ mentre f è decrescente in $(-\infty, -A]$ e in $[-A/\sqrt{2}, A]$.

Esercizio 3. Per $A > 0$ determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \log^2(A + x) \qquad \left[f(x) = \log^2(A - x)\right]$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-A}^{A} \log^2(A + x)\,dx \qquad \left[\int_{-A}^{A} \log^2(A - x)\,dx\right].$$

Poniamo $t = A + x$, allora $dt = dx$ e integrando per parti due volte si ha

$$\begin{aligned}
\int \log^2(A + x)\,dx &= \int \log^2(t)\,dt \\
&= t\log^2(t)\,dt - 2\int \log(t)\,dt \\
&= t\log^2(t) - 2t\log(t)\,dt + 2\int 1\,dt \\
&= t\log^2(t) - 2t\log(t) + 2t + c \\
&= (A + x)\log^2(A + x) - 2(A + x)\log(A + x) + 2(A + x) + c.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale improprio vale

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} \log^2(A + x)\,dx = 2A\log^2(2A) - 4A\log(2A) + 4A& \\
- \lim_{x\to -A} \big((A + x)\log^2(A + x) - 2(A + x)\log(A + x) + 2(A + x)\big)& \\
= 2A\log^2(2A) - 4A\log(2A) + 4A.&
\end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene che

$$\int \log^2(A - x)\,dx = (x - A)\log^2(A - x) - 2(x - A)\log(A - x) + 2(x - A) + c$$

e

$$\int_{-A}^{A} \log^2(A - x)\,dx = 2A\log^2(2A) - 4A\log(2A) + 4A.$$