Analisi Matematica 1

C. L. Ingegneria - Università di Roma "Tor Vergata"

Prova scritta online - 19 Giugno 2020

SOLUZIONI

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{A}{n}\right)\right).$$

Dato che per $t \to 0$,

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{e} \quad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

ne segue che per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
n^2\left(\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{A}{n}\right)\right) &= n^2\left(\log(e)+\log\left(1+\frac{1}{en^2}\right)-\cos\left(\frac{A}{n}\right)\right)\\
&= n^2\left(1+\left(\frac{1}{en^2}+o(1/n^2)\right)-\left(1-\frac{A^2}{2n^2}+o(1/n^2)\right)\right)\\
&= \frac{1}{e}+\frac{A^2}{2}+o(1).
\end{aligned}$$

Così possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{A}{n}\right)\right) = \frac{1}{e}+\frac{A^2}{2}.$$

Esercizio 2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - |x+2|}{x^2+2}\right) \qquad \left[f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - |x-2|}{x^2+2}\right)\right]$$

Il denominatore x^2+2 è sempre diverso da zero. Inoltre, dato che la funzione arcoseno è definita nell'intervallo $[-1, 1]$, dobbiamo imporre che valga la doppia disequazione

$$-1 \leq \frac{x^2 - |x+2|}{x^2+2} \leq 1$$

ossia

$$-(x^2+2) \leq x^2 - |x+2| \leq x^2 + 2$$

e quindi

$$-2 \leq |x+2| \leq 2x^2 + 2.$$

La disuguaglianza a sinistra è sempre soddifatta e dunque rimane da risolvere quella a destra. Spezziamo l'analisi a seconda del segno dell'argomento del modulo:

$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ -x-2 \leq 2x^2+2 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 \leq 2x^2+2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x < -2 \\ 2x^2+x+4 \geq 0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x-1)x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1/2 \end{cases}$$

Dunque il dominio è

$$D = (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty).$$

In modo analogo si trova che il dominio di

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - |x-2|}{x^2+2}\right).$$

è

$$D = (-\infty, -1/2] \cup [0, +\infty).$$

Esercizio 3. Per $A > 0$, determinare le primitive della funzione

$$e^{-Ax} \arctan(1 - e^{-Ax})$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-Ax} \arctan(1 - e^{-Ax})\, dx.$$

Poniamo $t = 1 - e^{-Ax}$, allora $dt = Ae^{-Ax} dx$ e integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int e^{-Ax} \arctan(1 - e^{-Ax})\, dx &= \frac{1}{A} \int \arctan(t)\, dt \\
&= \frac{t \arctan(t)}{A} - \frac{1}{A} \int \frac{t}{1 + t^2}\, dt \\
&= \frac{t \arctan(t)}{A} - \frac{\log(1 + t^2)}{2A} + c \\
&= \frac{(1 - e^{-Ax}) \arctan(1 - e^{-Ax})}{A} - \frac{\log(1 + (1 - e^{-Ax})^2)}{2A} + c.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-Ax} \arctan(1 - e^{-Ax})\, dx &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(1 - e^{-Ax}) \arctan(1 - e^{-Ax})}{A} - \frac{\log(1 + (1 - e^{-Ax})^2)}{2A} \right) - 0 \\
&= \frac{\arctan(1)}{A} - \frac{\log(1 + 1)}{2A} \\
&= \frac{\pi}{4A} - \frac{\log(2)}{2A}.
\end{aligned}$$