# Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
# Analisi Matematica I - Prova scritta del 17 Febbraio 2020

**Esercizio 1. [7 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{2An}-\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-A}\right]n^2$$

con $A\in\mathbb{R}$.

*Svolgimento.* Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $t\to 0$:

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3)$, $\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, $(1+t)^{1/2}=1+\frac{t}{2}+o(t)$, $(1-t)^{-1}=1+t+t^2+o(t^2)$.

Abbiamo che

$$\log\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)=\log\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{2An}&=\exp\left(2An\log\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(\frac{A}{n}-\frac{A}{3n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\&=1+\frac{A}{n}-\frac{A}{3n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^2+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\&=1+\frac{A}{n}-\frac{A}{3n^2}+\frac{A^2}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-A}&=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{A}{n}\right)^{-1}\\&=\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1+\frac{A}{n}+\frac{A^2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\&=1+\frac{A}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{A^2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

Infine

$$\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{An}-\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-A}=-\frac{A}{3n^2}+\frac{A^2}{2n^2}-\frac{1}{2n^2}-\frac{A^2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=-\frac{3+2A+3A^2}{6n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Così si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{3+2A+3A^2}{6}.$$

**Esercizio 2.** **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - A - 1}{|x| - \sqrt{A}}\right) - |x|$$

per $A > 0$ specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

*Svolgimento.* Dato che il denominatore deve essere non nullo si ha che $|x| \neq \sqrt{A}$ da cui segue che il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{A}, \sqrt{A}\}$. La funzione $f$ è pari.
I limiti agli estremi del dominio per $x \geq 0$ sono:

$$\lim_{x \to (\sqrt{A})^-} f(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{A}, \qquad \lim_{x \to (\sqrt{A})^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{A}.$$

Inoltre per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - A - 1}{x - \sqrt{A}}\right) - x = -x + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

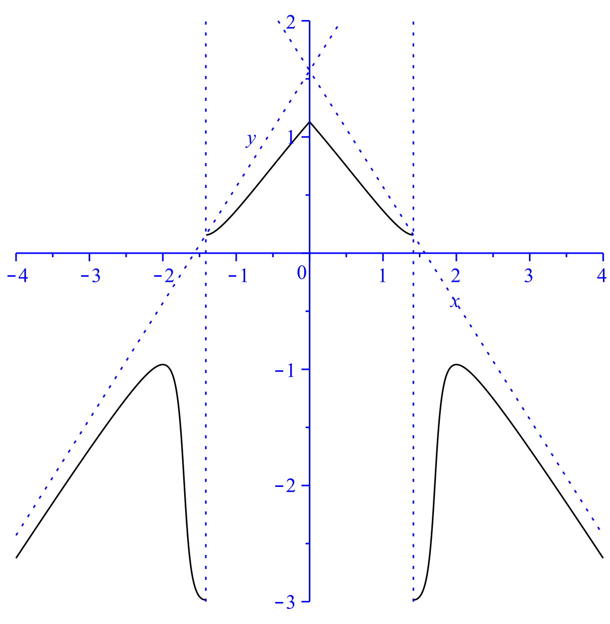
Quindi per $x \to +\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = -x + \frac{\pi}{2}$, mentre per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = x + \frac{\pi}{2}$.
Derivata prima. Per $x > 0$ e $x \neq \sqrt{A}$,

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{A})^2 + 1}{(x - \sqrt{A})^2 + (x^2 - A - 1)^2} - 1 = \frac{1 - (x^2 - A - 1)^2}{(x - \sqrt{A})^2 + (x^2 - A - 1)^2} = \frac{(x^2 - A)(A + 2 - x^2)}{(x - \sqrt{A})^2 + (x^2 - A - 1)^2}.$$

Quindi, per $x \geq 0$, $f$ è decrescente in $[0, \sqrt{A})$ e in $[\sqrt{A+2}, +\infty)$ e $f$ è crescente in $(\sqrt{A}, \sqrt{A+2}]$. Così $x = \pm\sqrt{A+2}$ sono punti di massimo relativo. Inoltre $x = 0$ è un massimo assoluto e un punto di non derivabilità (punto angoloso) con

$$f'_{\pm}(0) = \mp \frac{A(A+2)}{A^2 + 3A + 1}.$$

Si noti che $\lim_{x \to \pm(\sqrt{A})^-} f'(x) = \lim_{x \to \pm(\sqrt{A})^+} f'(x) = 0$.




Caso $A = 2$: grafico di $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2 - 3}{|x| - \sqrt{2}}\right) - |x|$.

**Esercizio 3.** [**4 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{|\sin(2x)|^\alpha}\,dx. \qquad \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin x)}{|\sin(2x)|^\alpha}\,dx, \quad \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\log(1+\sin x)}{|\sin(2x)|^\alpha}\,dx\right].$$

*Svolgimento.* Consideriamo il primo integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{|\sin(2x)|^\alpha}\,dx.$$

I punti da indagare sono $0^+$ e $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$.

$$f(x) \sim \frac{\log(1-(1-x^2/2))}{(2x)^\alpha} \sim \frac{2\log(x)}{2^\alpha x^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{x^\alpha \log^{-1}(x)}$$

e quindi l'integrale di $f$ su $(0,\pi/4)$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

Per $x \to (\pi/2)^-$, $\cos(x) \to 0^+$ e $t = \pi/2 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{-\cos(x)}{(2\sin(x)\cos(x))^\alpha} \sim -\frac{1}{2^\alpha \cos^{\alpha-1}(x)} \sim -\frac{1}{2^\alpha \sin^{\alpha-1}(t)} \sim \frac{1}{2^\alpha t^{\alpha-1}}$$

e quindi l'integrale di $f$ su $(\pi/4,\pi/2)$ è convergente se e solo se $\alpha - 1 < 1$, ossia se $\alpha < 2$.

Possiamo concludere l'integrale dato è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

Le altri varianti si riducono alla prima con le sostituzioni $x = -t$, oppure $x = \pi/2 - t$.

**Esercizio 4. [6 punti]** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos(x))\,dx. \quad \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\sin(x))dx, \quad \int_{-\pi/2}^{0} \sin(2x)\log(1+\sin x)dx\right].$$

*Svolgimento.* Consideriamo il primo integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)\,dx.$$

Usando la sostituzione $t=\cos(x)$, $dt=-\sin(x)\,dx$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\cos(x)\log(1-\cos(x))\,dx\\ &= \int_0^1 2t\log(1-t)\,dt.\end{aligned}$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int 2t\log(1-t)dt = \int D\Big(t^2\Big)\log(1-t)\,dt &= t^2\log(1-t) - \int \frac{-t^2}{1-t}\,dt\\ &= t^2\log(1-t) - \int\Big(1+t-\frac{1}{1-t}\Big)\,dt\\ &= t^2\log(1-t) - t - \frac{t^2}{2} - \log(1-t) + c.\end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos(x))\,dx &= \int_0^1 2t\log(1-t)\,dt\\ &= \Big[t^2\log(1-t) - t - \frac{t^2}{2} - \log(1-t)\Big]_0^1\\ &= \lim_{t\to1^-}\Big(t^2\log(1-t) - t - \frac{t^2}{2} - \log(1-t)\Big) - 0\\ &= -\frac{3}{2} + \lim_{t\to1^-}(t^2-1)\log(1-t)\\ &= -\frac{3}{2} + 0 = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Le altri varianti si riducono alla prima con le sostituzioni $x=-t$, oppure $x=\pi/2-t$.

**Esercizio 5. [5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x(x+2)(y(x)-A)}{1+x^2} \\ y(0) = B \end{cases}$$

con $A > B > 0$.

*Svolgimento.* L'equazione differenziale è a variabili separabili con una soluzione stazionaria $y = A$. Separando e integrando si ottiene

$$\int \frac{1}{y-A}\,dy = \int \frac{x(x+2)}{1+x^2}\,dx.$$

Svolgendo il primo integrale si trova

$$\int \frac{1}{y-A}\,dy = \log|y-A| + c.$$

Mentre per il secondo integrale abbiamo che

$$\int \frac{x(x+2)}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan(x) + \log(1+x^2) + c.$$

Pertanto

$$\log|y(x)-A| = x - \arctan(x) + \log(1+x^2) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = B < A$ si ottiene $c = \log|B-A| = \log(A-B)$.
Così

$$|y(x)-A| = \exp(x - \arctan(x) + \log(1+x^2) + \log(A-B))$$

e

$$y(x) - A = \pm(A-B)(1+x^2)e^{x-\arctan(x)}.$$

Infine, ricordando di nuovo che $y(0) = B$, si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = A - (A-B)(1+x^2)e^{x-\arctan(x)}.$$