Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 29 Gennaio 2020

Esercizio 1. [**4 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 6$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin(e^{Ax^2} - \cos(\sqrt{2}\,x))$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3), \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + o(t^7), \qquad \sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} e^{Ax^2} - \cos(\sqrt{2}\,x) &= \left(1 + Ax^2 + \frac{A^2x^4}{2} + \frac{A^3x^6}{6} + o(x^6)\right) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{90} + o(x^6)\right) \\ &= (A+1)x^2 + \frac{3A^2-1}{6}x^4 + \frac{15A^3+1}{90}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \sin(e^{Ax^2} - \cos(\sqrt{2}\,x)) &= (A+1)x^2 + \frac{3A^2-1}{6}x^4 + \frac{15A^3+1}{90}x^6 - \frac{1}{6}\Big((A+1)x^2 + o(x^3)\Big)^3 + o(x^6) \\ &= (A+1)x^2 + \frac{3A^2-1}{6}x^4 + \frac{15A^3+1-15(A+1)^3}{90}x^6 + o(x^6) \\ &= (A+1)x^2 + \frac{3A^2-1}{6}x^4 - \frac{14+45A(A+1)}{90}x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

Esercizio 2. [7 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\Big(x+\cos(\sqrt{2x})\Big)^{A/x} - 1}{\log(1+x)}\,(Ax+B),$$

calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ con $A, B > 0$.

Svolgimento.
Calcolo di $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5), \qquad \log(1+t) = t + o(t), \qquad e^t = 1 + t + o(t).$$

Per $x \to 0^+$,

$$x + \cos(\sqrt{2x}) = x + 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\Big(x+\cos(\sqrt{2x})\Big)^{\frac{A}{x}} &= \Big(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\Big)^{\frac{A}{x}} = \exp\left(\frac{A}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{A}{x}\left(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right) = \exp\left(\frac{Ax}{6}+o(x)\right) = 1 + \frac{Ax}{6} + o(x).\end{aligned}$$

Così

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{Ax}{6}+o(x)}{x+o(x)}(B+o(1)) = \frac{AB}{6}.$$

Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\Big(x+\cos(\sqrt{2x})\Big)^{A/x} &= x^{A/x}\left(1+\frac{\cos(\sqrt{2x})}{x}\right)^{A/x} = x^{A/x}\,(1+o(1))^{A/x}\\ &= \exp\left(\frac{A\log(x)}{x}\right)\exp\left(\frac{A\log\left(1+o(1)\right)}{x}\right)\\ &= \left(1+\frac{A\log(x)}{x}+o\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\right)\left(1+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)\\ &= 1+\frac{A\log(x)}{x}+o\Big(\frac{\log x}{x}\Big).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\log(1+x) = \log(x) + \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log(x) + o(1/x).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{A\log(x)}{x}+o\Big(\frac{\log(x)}{x}\Big)}{\log(x)+o(1/x)}\,(Ax+B) = A^2.$$

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log|(A+1)e^x - Ae^{2x}|$$

per $A > 0$, specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Per il dominio dobbiamo imporre che $(A+1)e^x \neq Ae^{2x}$ ossia $e^x \neq (A+1)/A$ da cui

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \log\left(\frac{A+1}{A}\right) \right\}.$$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \to (\log\left(\frac{A+1}{A}\right))^{\pm}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Quindi $x = \log\left(\frac{A+1}{A}\right)$ è un asintoto verticale.
Inoltre per $x \to +\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 2x + \log(A)$:

$$f(x) = \log(Ae^{2x} - (A+1)e^x) = 2x + \log(A - (A+1)e^{-x}) = 2x + \log(A) + o(1).$$

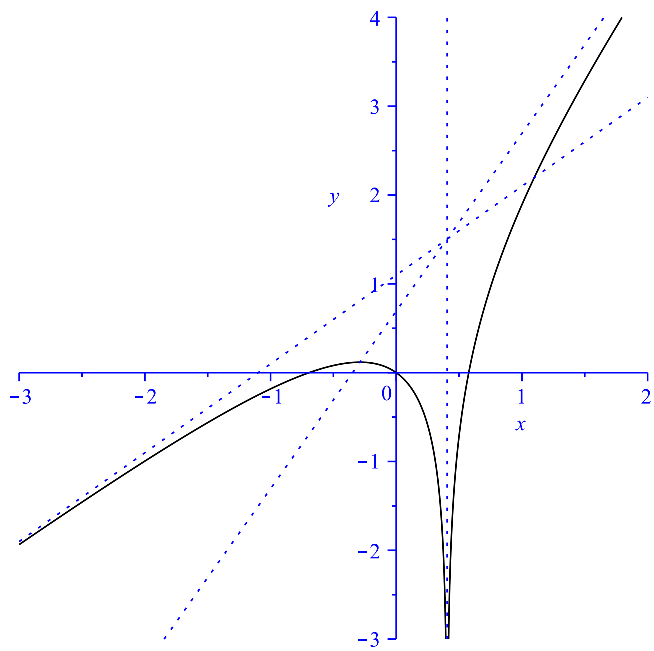
Mentre per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = x + \log(A+1)$:

$$f(x) = \log((A+1)e^x - Ae^{2x}) = x + \log(A+1 - Ae^x) = x + \log(A+1) + o(1).$$

Derivata prima. Per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{(A+1)e^x - 2Ae^{2x}}{(A+1)e^x - Ae^{2x}} = \frac{A+1-2Ae^x}{A+1-Ae^x}$$

pertanto f è crescente in $(-\infty, \log\left(\frac{A+1}{2A}\right)]$ e in $(\log\left(\frac{A+1}{A}\right), +\infty)$ e f è decrescente in $[\log\left(\frac{A+1}{2A}\right), \log\left(\frac{A+1}{A}\right))$.
Quindi $x = \log\left(\frac{A+1}{2A}\right)$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono massimi o minimi assoluti.



Caso $A = 2$: grafico di $f(x) = \log|3e^x - 2e^{2x}|$.

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1/A} \sqrt{x}\arcsin(1-Ax)\,dx$$

con $A>0$.

Svolgimento. Integriamo per parti e poi effettuiamo la sostituzione $t=\sqrt{2-Ax}$ (e quindi $Ax = 2-t^2$):

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/A} \sqrt{x}\arcsin(1-Ax)\,dx &= \int_0^{1/A} D\Big(\frac{2x^{3/2}}{3}\Big)\arcsin(1-Ax)\,dx \\
&= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\arcsin(1-Ax)\right]_0^{1/A} - \frac{2}{3}\int_0^{1/A} x^{3/2}\frac{-A}{\sqrt{1-(1-Ax)^2}}\,dx \\
&= 0 + \frac{2}{3}\int_0^{1/A}\frac{Ax^{3/2}}{\sqrt{Ax(2-Ax)}}\,dx = \frac{2}{3\sqrt{A}}\int_0^{1/A}\frac{Ax}{\sqrt{2-Ax}}\,dx \\
&= \frac{2}{3\sqrt{A}}\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{2-t^2}{t}\left(-\frac{2t\,dt}{A}\right) = \frac{4}{3A^{3/2}}\int_1^{\sqrt{2}}(2-t^2)\,dt \\
&= \frac{4}{3A^{3/2}}\left[2t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4(4\sqrt{2}-5)}{9A^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(y(x))^2 e^{-x}}{\sqrt{A + e^{-x}}} \\ y(0) = \dfrac{1}{B} \end{cases}$$

con $A, B > 0$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è a variabili separabili con $y = 0$ come soluzione stazionaria. Separando e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{A + e^{-x}}}\, dx.$$

Svolgendo il primo integrale si trova

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c.$$

Mentre per il secondo integrale con la sostituzione $e^{-x} = t$ si ha

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{A + e^{-x}}}\, dx = -\int \frac{1}{\sqrt{A + t}}\, dt = -2\sqrt{A + t} + c = -2\sqrt{A + e^{-x}} + c.$$

Quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = -2\sqrt{A + e^{-x}} + c$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{A + e^{-x}} - c}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1/B$ si ottiene

$$-B = -2\sqrt{A + 1} + c \implies c = -B + 2\sqrt{A + 1}.$$

Così la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{A + e^{-x}} + B - 2\sqrt{A + 1}}.$$