Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 10 Luglio 2019

Esercizio 1. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x + Ax^2 + e^{-x}}$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + o(t^5), \qquad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3).$$

Pertanto per $x \to 0$ si ha

$$x+Ax^2+e^{-x} = 1+x+Ax^2+\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) = 1+\frac{(2A+1)x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + Ax^2 + e^{-x}} &= \frac{1}{1 + \frac{(2A+1)x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5))} \\
&= 1 - \Big(\frac{(2A+1)x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{(2A+1)x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{(2A+1)x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \Big(\frac{(2A+1)^2x^4}{4} - \frac{(2A+1)x^5}{6}\Big) + o(x^5) \\
&= 1 - \Big(\frac{1}{2} + A\Big)x^2 + \frac{x^3}{6} + \Big(\frac{5}{24} + A + A^2\Big)x^4 - \Big(\frac{19}{120} + \frac{A}{3}\Big)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Esercizio 2. [6 punti] Data la funzione:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{x}) \log \left(\left| \sin \frac{\pi x}{A} \right| \right)}{\left((x-A)^2 + \log(\frac{x}{A}) \right) \log(|x-A|)},$$

calcolare $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to A} f(x)$ per $A > 0$.

Svolgimento. Per $x \to 0^+$ si ha che

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{A} \log \left(\frac{\pi x}{A} \right)}{\log \left(\frac{x}{A} \right) \log(A)} = \frac{\sqrt{A} \left(\log(x) + \log \left(\frac{\pi}{A} \right) \right)}{(\log(x) - \log(A)) \log(A)} \to \frac{\sqrt{A}}{\log(A)}.$$

Così

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{A}}{\log(A)}.$$

Per $x \to A$, posto $y = x - A \to 0$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{y+A}) \log \left(\left| \sin \frac{\pi(y+A)}{A} \right| \right)}{\left(y^2 + \log(\frac{y+A}{A}) \right) \log(|y|)} = -\sqrt{A} \frac{(\sqrt{1 + \frac{y}{A}} - 1) \log \left(\left| \sin \frac{\pi y}{A} \right| \right)}{\left(y^2 + \log(1 + \frac{y}{A}) \right) \log(|y|)}.$$

Dato che per $y \to 0$,

$$\sqrt{1 + \frac{y}{A}} \sim 1 + \frac{y}{2A}, \quad y^2 + \log\left(1 + \frac{y}{A}\right) \sim \frac{y}{A}, \quad \frac{\log \left(\left| \sin \frac{\pi y}{A} \right| \right)}{\log(|y|)} \sim \frac{\log \left(\frac{\pi |y|}{A} \right)}{\log(|y|)} = \frac{\log(|y|) + \log \left(\frac{\pi}{A} \right)}{\log(|y|)} \to 1,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x \to A} f(x) = -\frac{\sqrt{A}}{2}.$$

Esercizio 3. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 5 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \log\left(|x^2 - 1|\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ in quanto deve essere $x \neq 0$ e $|x^2 - 1| > 0$.
Dato che funzione è pari la studiamo solo per $x > 0$.
Limiti agli estremi.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{5\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Quindi $x = 1$ è un asintoto verticale e non ci sono asintoti obliqui/orizzontali.
Derivata prima. Per $x \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$f'(x) = \frac{5(-2/x^3)}{1 + 1/x^4} - \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{2x(2x^4 + 5x^2 - 3)}{(1 + x^4)(1 - x^2)} = \frac{2x(x^2 + 3)(2x^2 - 1)}{(1 + x^4)(1 - x^2)}.$$

Dunque, per $x > 0$, f è crescente in $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, f è decrescente in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e in $(1, +\infty)$, ammette un minimo relativo in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e non ha massimi o minimi assoluti. Si noti che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

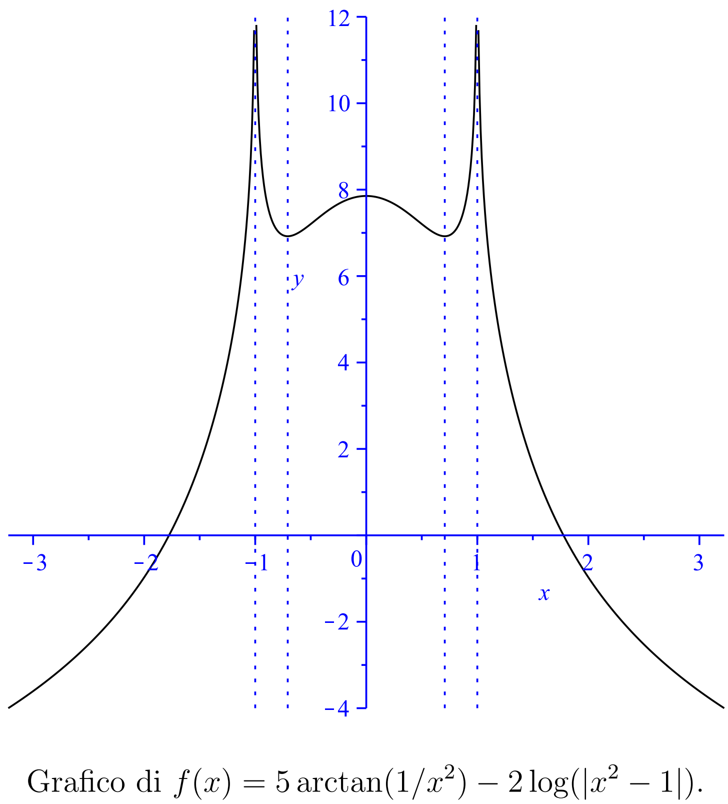

Grafico di $f(x) = 5 \arctan(1/x^2) - 2 \log(|x^2 - 1|)$.

Esercizio 4. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ con $A \in \mathbb{R}$,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\alpha\sqrt{x-A}}(x-A)^\alpha}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento. Per $x \to A^+$,

$$f(x) \sim \frac{\log(\sqrt{x-A})}{(x-A)^\alpha} = \frac{\log(x-A)}{2(x-A)^\alpha}$$

e quindi l'integrale di f su $(A, A+1)$ converge se e solo se $\alpha < 1$.
D'altra parte per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{-e^{-\sqrt{x-A}}}{e^{\alpha\sqrt{x-A}}(x-A)^\alpha} \sim -\frac{e^{-(1+\alpha)\sqrt{x}}}{x^\alpha}$$

e dunque l'integrale di f su $(A+1, +\infty)$ converge se e solo se $1 + \alpha > 0$, ossia se $\alpha > -1$.
Pertanto l'integrale di f su $(A, +\infty)$ converge se e solo se $-1 < \alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$, Con la sostituzione $t = e^{-\frac{\sqrt{x-A}}{2}}$ e $dt = -\frac{e^{-\frac{\sqrt{x-A}}{2}}}{4\sqrt{x-A}}\, dx$,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\frac{\sqrt{x-A}}{2}}\sqrt{x-A}}\, dx = 4\int_0^1 \log(1-t^2) dt.$$

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int \log(1-t^2)\, dt &= t\log(1-t^2) + 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\, dt \\
&= t\log(1-t^2) + 2\int (-1)\, dt + 2\int \frac{1}{1-t^2}\, dt \\
&= t\log(1-t^2) - 2t + \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= t\log(1-t^2) - 2t - \log(1-t) + \log(1+t) + c \\
&= (t-1)\log(1-t) + (t+1)\log(1+t) - 2t + c.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\frac{\sqrt{x-A}}{2}}\sqrt{x-A}}\, dx &= 4\Big[(t-1)\log(1-t) + (t+1)\log(1+t) - 2t\Big]_0^1 \\
&= 4\lim_{t\to 1^-} \Big((t-1)\log(1-t) + (t+1)\log(1+t) - 2t\Big) - 0 \\
&= 4\lim_{t\to 1^-} (t-1)\log(1-t) + 8\log(2) - 8 \\
&= 0 + 8\log(2) - 8 = 8(\log(2) - 1).
\end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = A\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = B \end{cases}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti.
Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $z^2 + 4z + 8 = 0$ sono $-2 \pm 2\mathrm{i}$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Alla funzione $f(x) = A\cos(2x)$ si associa il numero complesso $2i$, che non è soluzione dell'equazione caratteristica. Quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y_*(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Sostituendo nell'equazione, si ha

$$(4a + 8b)\cos(2x) + (4b - 8a)\sin 2x = A\cos(2x).$$

e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4a + 8b = A \\ 4b - 8a = 0 \end{cases}$$

si ottiene $a = \frac{A}{20}$, $b = \frac{A}{10}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = y_o(x) + y_*(x) = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x) + \frac{A}{20}\cos(2x) + \frac{A}{10}\sin(2x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = B$ si determinano le costanti c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{A}{20} = 0 \\ -2c_1 + 2c_2 + \frac{A}{5} = B \end{cases}$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{A}{20}, \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(B - \frac{3}{10}A\right)$$

Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$ è

$$y(x) = -\frac{A}{20}e^{-2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(B - \frac{3A}{10}\right)e^{-2x}\sin(2x) + \frac{A}{20}\cos(2x) + \frac{A}{10}\sin(2x).$$

Nota: se nell'esercizio si sostuisce $A\cos(2x)$ con $A\sin(2x)$, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{A}{10}e^{-2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(B + \frac{A}{10}\right)e^{-2x}\sin(2x) - \frac{A}{10}\cos(2x) + \frac{A}{20}\sin(2x).$$