Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 19 Giugno 2019

Esercizio 1. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 1$ per la seguente funzione:

$$f(x) = A\cos\big(\pi(1+x^2)\big) + Bx$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5).$$

Posto $t = x - 1 \to 0$:

$$f(x) = A\cos\big(\pi(2+2t+t^2)\big) + Bt + B = A\cos\big(\pi(2t+t^2)\big) + Bt + B.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
\cos\big(\pi(2t+t^2)\big) &= 1 - \frac{\pi^2(2t+t^2)^2}{2} + \frac{\pi^4(2t+t^2)^4}{24} + o(t^5)\\
&= 1 - \frac{\pi^2}{2}(4t^2+4t^3+t^4) + \frac{\pi^4}{24}\Big(16t^4 + 32t^5 + o(t^5)\Big) + o(t^5)\\
&= 1 - 2\pi^2t^2 - 2\pi^2t^3 + \left(\frac{2\pi^4}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right)t^4 + \frac{4\pi^4}{3}t^5 + o(t^5).
\end{aligned}$$

Pertanto, per $x \to 1$ si ha:

$$f(x) = A+B+B(x-1)-2A\pi^2(x-1)^2-2A\pi^2(x-1)^3+A\left(\frac{2\pi^4}{3}-\frac{\pi^2}{2}\right)(x-1)^4+\frac{4\pi^4}{3}A(x-1)^5+o((x-1)^5).$$

Esercizio 2. [6 punti] Data la funzione

$$f(x) = \Big(2e^{Ax} - \log(1+2Ax) - 1\Big)^{\frac{B}{x^2}}$$

calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ con $A > 0$ e $B > 0$.

Svolgimento. Per $x \to 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(2\Big(1 + Ax + \frac{(Ax)^2}{2} + o(x^2)\Big) - \Big(2Ax - \frac{(2Ax)^2}{2} + o(x^2)\Big) - 1\right)^{\frac{B}{x^2}} \\
&= \Big(1 + 3A^2x^2 + o(x^2)\Big)^{\frac{B}{x^2}} \\
&= \exp\Big(\frac{B}{x^2}\log\Big(1 + 3A^2x^2 + o(x^2)\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(\frac{B}{x^2}\Big(3A^2x^2 + o(x^2)\Big)\Big) = \exp\Big(3A^2B + o(1)\Big).
\end{aligned}$$

Così

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \exp\big(3A^2B\big).$$

Inoltre per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{AB}{x}}\left(2 - \frac{\log(1+2Ax)+1}{e^{Ax}}\right)^{\frac{B}{x^2}} \\
&= e^{\frac{AB}{x}}(2 + o(1))^{\frac{B}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Così

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Il dominio è $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ in quanto deve essere $x^2 - 2x \geq 0$ e $x \neq 0$. La funzione è non negativa nel dominio e si annulla in $x = 2$.
Limiti agli estremi.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Quindi $x = 0$ è un asintoto verticale. Inoltre per $x \to +\infty$,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} x \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = x\Big(1 - \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = x - 2 + o(1).$$

Analogamente per $x \to -\infty$,,

$$f(x) = -e^{-\frac{1}{x}} x \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = -x\Big(1 - \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = -x + 2 + o(1).$$

Quindi $y = x - 2$ è l'asintoto per $x \to +\infty$ e $y = -x + 2$ è l'asintoto per $x \to -\infty$.
Derivata prima. Per $x < 0$ e $x > 2$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{(x^2 - 2x) + x^2(x - 1)}{x^2\sqrt{x^2 - 2x}} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Pertanto f è crescente in $[-\sqrt{2}, 0)$ e in $[2, +\infty)$ e f è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2}]$.
Inoltre $x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 2$ con $f(2) = 0$ è un punto di minimo assoluto. La funzione non è derivabile in $x = 2$ e $\lim_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty$.

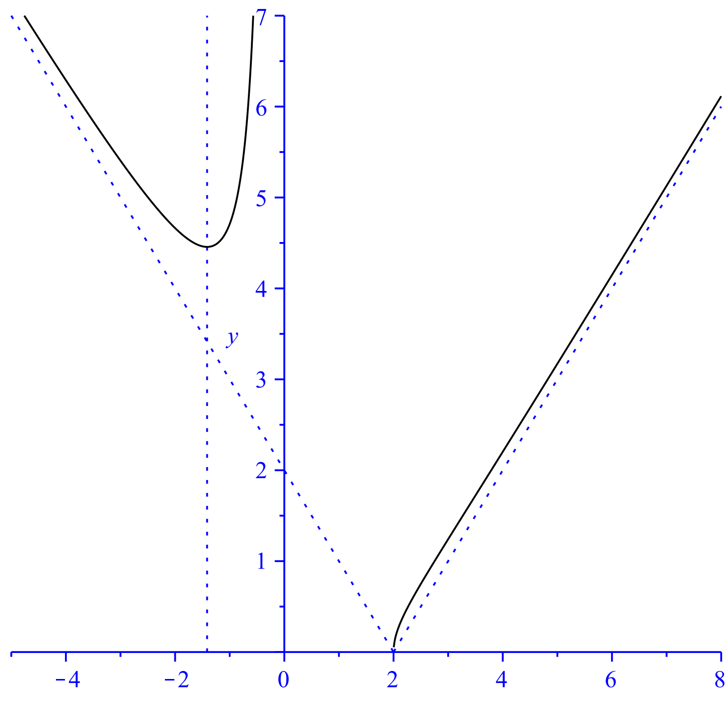

Grafico di $f(x) = e^{-1/x}\sqrt{x^2 - 2x}$.

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ con $A > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax} - 1}{e^{\frac{3}{2}Ax}(e^{Ax} - e^{-Ax})^{\alpha}}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Svolgimento. Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{2Ax}{(1 + Ax - (1 - Ax))^{\alpha}} = \frac{1}{(2Ax)^{\alpha-1}}.$$

Quindi l'integrale di f su $(0, 1]$ converge se e solo se $\alpha - 1 < 1$, ossia se $\alpha < 2$.
Inoltre per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{e^{2Ax}}{e^{\frac{3}{2}Ax} \cdot e^{\alpha Ax}} = e^{(\frac{1}{2}-\alpha)Ax}$$

Segue che l'integrale di f su $[1, +\infty)$ converge se e solo se $\frac{1}{2} - \alpha < 0$, ossia se $\alpha > \frac{1}{2}$.
Pertanto l'integrale di f su $(0, +\infty)$ converge se e solo se $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax} - 1}{e^{\frac{3}{2}Ax}(e^{Ax} - e^{-Ax})^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax} - 1}{(e^{2Ax} - 1)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2Ax} - 1}}.$$

Con la sostituzione $t = e^{2Ax}$ e, successivamente, $s = \sqrt{t-1}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2Ax} - 1}} &= \frac{1}{A} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t\sqrt{t-1}} \\
&= \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1 + s^2} \\
&= \frac{1}{A} \left[\arctan(s)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2A}.
\end{aligned}$$

In alternativa, con la sola sostituzione $t = e^{-Ax}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2Ax} - 1}} &= -\frac{1}{A} \int_1^{0} \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} \\
&= \frac{1}{A} \int_0^{1} \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}} \\
&= \frac{1}{A} \left[\arcsin(t)\right]_0^{1} = \frac{\pi}{2A}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-Ay(x)} \arctan\left(\sqrt{x+1}\right) \\ y(-1) = B \end{cases}$$

con $A > 0$ e $B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int e^{Ay} dy = \int \arctan\left(\sqrt{x+1}\right)\, dx.$$

Abbiamo che

$$\int e^{Ay}\, dy = \frac{e^{Ay}}{A} + c.$$

Inoltre, con la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ e integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int \arctan\left(\sqrt{x+1}\right)\, dx = 2\int t \arctan(t) dt = t^2 \arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \\ = t^2 \arctan(t) - t + \arctan(t) + c \\ = (x+2)\arctan\left(\sqrt{x+1}\right) - \sqrt{x+1} + c. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{e^{Ay(x)}}{A} = (x+2)\arctan\left(\sqrt{x+1}\right) - \sqrt{x+1} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = B$ si determina la costante c:

$$\frac{e^{AB}}{A} = 0 - 0 + c \implies c = \frac{e^{AB}}{A}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy per $x \geq -1$ è

$$y(x) = \frac{1}{A} \log\left(A(x+2)\arctan\left(\sqrt{x+1}\right) - A\sqrt{x+1} + e^{AB}\right).$$