Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 20 Febbraio 2019

Esercizio 1. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ per la seguente funzione:

$$f(x) = (A\sin(x) - B\cos(x))(2x - \pi)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4), \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5).$$

Posto $t = x - \frac{\pi}{2} \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (A\sin(x) - B\cos(x))(2x - \pi) \\ &= \left(A\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - B\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot 2t \\ &= 2t\,(A\cos(t) + B\sin(t)) \\ &= 2t\left(A - \frac{At^2}{2} + \frac{At^4}{24} + Bt - \frac{Bt^3}{6} + o(t^4)\right) \\ &= 2At + 2Bt^2 - At^3 - \frac{Bt^4}{3} + \frac{At^5}{12} + o(t^5). \end{aligned}$$

Pertanto, per $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha

$$f(x) = 2A\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2B\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - A\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{B}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{A}{12}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right).$$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{A}{n^2}\right)\right)^n-\frac{2n^3}{2n+1}\right).$$

con $A\in\mathbb{R}$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{A}{n^2}\right)\right)^n &= \left(1-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{A}{n^2}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)^n\\
&= \left(1-\frac{1}{2n^2}-\frac{A}{n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)^n\\
&= \exp\left(n\log\left(1-\frac{1}{2n^2}-\frac{A}{n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\Big(-\frac{1}{2n^2}-\frac{A}{n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n}-\frac{A}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\
&= 1+\left(-\frac{1}{2n}-\frac{A}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)+\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2n}-\frac{A}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)^2+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1-8A}{8n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{2n^3}{2n+1}=n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}=n^2\Big(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)=n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+o(1).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{A}{n^2}\right)\right)^n-\frac{2n^3}{2n+1} &= n^2\Big(1-\frac{1}{2n}+\frac{1-8A}{8n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)-n^2+\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+o(1)\\
&= \frac{1-8A}{8}-\frac{1}{4}+o(1)=-\frac{1}{8}-A+o(1).
\end{aligned}$$

Così il limite richiesto vale $-\frac{1}{8}-A$.

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(1 - x - \log|3 - x|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ in quanto deve essere $|3 - x| > 0$ ossia $x \neq 3$.
Limiti agli estremi. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = \arctan(-x(1 + o(1))) \to \mp\frac{\pi}{2}.$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto orizzontale a $-\infty$, e $y = -\frac{\pi}{2}$ è l'asintoto orizzontale a $+\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \arctan(-\log|3 - x| \cdot (1 + o(1))) = \frac{\pi}{2}.$$

Derivata prima. Per $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 - x - \log|3 - x|)^2} \cdot \left(-1 - \frac{1}{x - 3}\right) = \frac{1}{1 + (1 - x - \log|3 - x|)^2} \cdot \frac{2 - x}{x - 3}.$$

Pertanto f è crescente in $[2, 3)$, mentre f è decrescente in $(-\infty, 2]$ e in $(3, +\infty)$. Quindi $x = 2$ è un punto di minimo relativo e $f(2) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
Infine

$$\lim_{x\to 3^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{1}{(\log|3 - x|)^2 \cdot (1 + o(1))} \cdot \frac{-1 + o(1)}{x - 3} = \mp\infty.$$

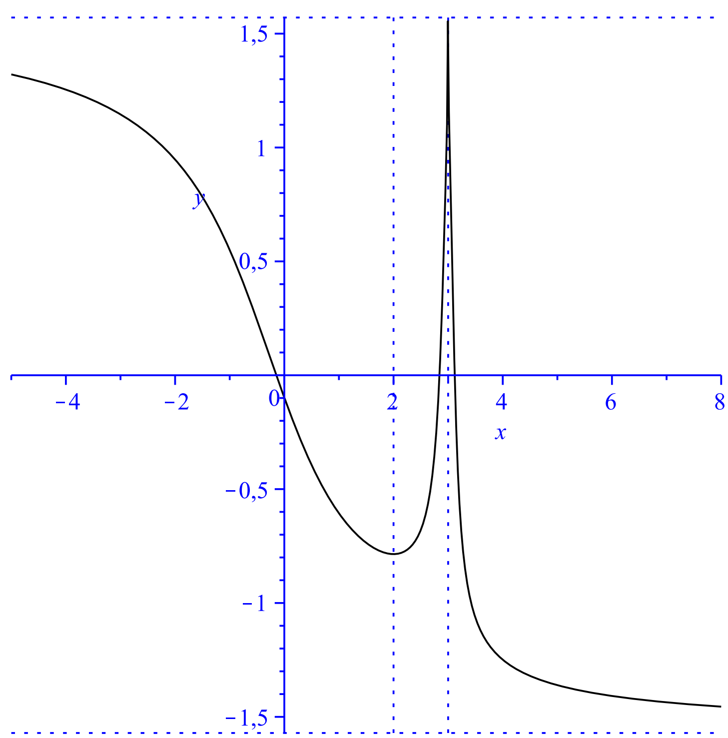

Grafico di $f(x) = \arctan(1 - x - \log(|3 - x|))$.

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(x-A+1)\big(\arctan(x-A)\big)^{2\alpha-1}}{(x-A)^{5\alpha-1}}\,dx$$

con $A \in \mathbb{R}$. Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento. Per $x \to A^+$,

$$f(x) \sim \frac{(x-A)\cdot(x-A)^{2\alpha-1}}{(x-A)^{5\alpha-1}} = \frac{1}{(x-A)^{3\alpha-1}}.$$

Quindi l'integrale di f su $(A, A+1)$ converge se e solo se $3\alpha - 1 < 1$, ossia se $\alpha < \frac{2}{3}$.
Inoltre per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha-1} \frac{\log(x)}{x^{5\alpha-1}}.$$

Segue che l'integrale di f su $(A+1, +\infty)$ converge se e solo se $5\alpha - 1 > 1$, ossia se $\alpha > \frac{2}{5}$.
Pertanto l'integrale di f su $(A, +\infty)$ converge se e solo se $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{2}{3}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$. Intanto osserviamo che

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x-A)^{3/2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^{3/2}}\,dx.$$

Integrando per parti, e usando poi la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^{3/2}}\,dx &= -2\int_0^{+\infty} D\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\log(x+1)\,dx \\
&= -2\left[\frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \\
&= -2\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} + 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} + 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= 0 + 0 + 4\,[\arctan(t)]_0^{+\infty} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{A+\sqrt{x}} = \dfrac{(A+\sqrt{x})^{2A}}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

con $A > 0$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.
Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$, abbiamo che

$$\int \frac{dx}{A+\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{A+t}\, dt = \int \left(2 - \frac{2A}{A+t}\right) dt$$
$$= 2t - 2A\log|A+t| = 2\sqrt{x} - 2A\log(A+\sqrt{x})$$

e il fattore integrante è

$$\exp\left(2\sqrt{x} - 2A\log(A+\sqrt{x})\right) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{(A+\sqrt{x})^{2A}}.$$

Quindi moltiplicando a destra e a sinistra per tale fattore e integrando otteniamo

$$\frac{e^{2\sqrt{x}}}{(A+\sqrt{x})^{2A}} \cdot y(x) = \int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = e^{2\sqrt{x}} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 0$ si determina la costante c:

$$0 = e^2 + c \implies c = -e^2.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy per $x > 0$ è

$$y(x) = (A+\sqrt{x})^{2A}\left(1 - e^{2(1-\sqrt{x})}\right).$$