Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 30 Gennaio 2019

Esercizio 1. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ nel punto $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \log(Ax^3 + \cos(x)) - \frac{x^2}{2}$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5).$$

Quindi

$$Ax^3 + \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\log(Ax^3 + \cos(x)) &= \log\big(1 + (Ax^3 + \cos x - 1)\big) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(- \frac{x^2}{2} + Ax^3 + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(- \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} + A^3x^6 - Ax^5\Big) + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{A}{2}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Si deduce che lo sviluppo cercato è

$$f(x) = -x^2 + Ax^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{A}{2}x^5 + o(x^5).$$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(\frac{Ae^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)}$$

con $A \neq 0$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\log(1+e^{-n})\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\Big(e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})\Big)\right) \\
&= 1 + \frac{e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})}{n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})}{n}\Big)^2 + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n^2}\Big) \\
&= 1 + \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^{-2n}}{2n^2} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\log(1+e^n) = \log(e^n(1+e^{-n})) = n + \log(1+e^{-n}) = n + e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n}).$$

Quindi il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
n\cdot(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n) &= n + e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-2n}}{2n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big) - \Big(n + e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})\Big) \\
&= \frac{e^{-2n}}{2n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Invece il denominatore è

$$\sin^2\left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right) = \left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + o\Big(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\Big)\right)^2 = A^2\frac{e^{-2n}}{n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big),$$

dove, nel primo passaggio, si è usato il fatto che $1/n! \in o\Big(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\Big)$ perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{e^{-n}/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}e^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} = 0.$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{-2n}}{2n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big)}{A^2\frac{e^{-2n}}{n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big)} = \frac{1}{2A^2}.$$

In alternativa, il numeratore si può trattare anche così

$$n\cdot(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n) = n\cdot(\exp(t_n) - 1 - t_n) = n\cdot\left(\frac{t_n^2}{2} + o(t_n^2)\right) = \frac{e^{-2n}}{2n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big).$$

dove $t_n = \dfrac{\log(1+e^{-n})}{n} = \dfrac{e^{-n}}{n} + o\Big(\dfrac{e^{-n}}{n}\Big) \to 0.$

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 - 5x + 6| - 1)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Dominio. L'argomento dell'arcoseno deve essere nell'intervallo $[-1, 1]$, quindi

$$-1 \leq |x^2 - 5x + 6| - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x^2 - 5x + 6| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 5x + 6 \leq 2$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \leq 0 \\ x^2 - 5x + 8 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in [1, 4] \cap \mathbb{R} = [1, 4].$$

Quindi il dominio è l'intervallo $D = [1, 4]$ e la funzione è continua in D.
Derivata prima. Si noti che l'argomento del modulo è $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-5}{\sqrt{1 - (|x^2 - 5x + 6| - 1)^2}} & \text{se } x \in (1, 2) \cup (3, 4) \\ -\dfrac{2x-5}{\sqrt{1 - (|x^2 - 5x + 6| - 1)^2}} & \text{se } x \in (2, 3) \end{cases}$$

Pertanto f è crescente in $[2, 5/2]$ e in $[3, 4]$ mentre f è decrescente in $[1, 2]$ e in $[5/2, 3]$.
I punti $x = 2$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo (con $f(2) = f(3) = -\pi/2$) e $x = 5/2$ è un punto di massimo relativo. I punti $x = 1$ e $x = 4$ sono di massimo relativo (con $f(1) = f(4) = \pi/2$).

Inoltre la funzione non è derivabile nei punti $x = 1$, $x = 2$ (cuspide), $x = 3$ (cuspide) e $x = 4$:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f'(x) + \infty, \quad \lim_{x \to 4^-} f'(x) = +\infty.$$

.

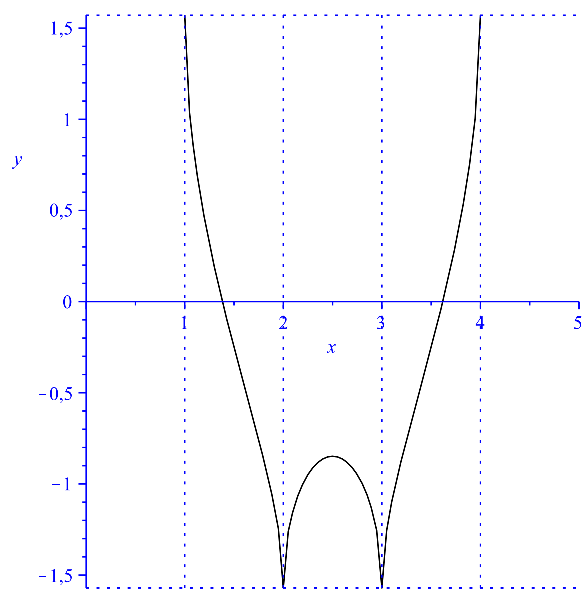

Grafico di $f(x) = \arcsin(|x^2 - 5x + 6| - 1)$.

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}}\,dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}A$ con $A > 0$.

Svolgimento. Per la convergenza è necessario studiare il comportamento asintotico della funzione integranda f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} \sim \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$$

e dato che $1/2 < 1$, l'integrale di f su $(0,1)$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim e^{-\alpha x}$$

e l'integrale di f su $(1,+\infty)$ converge se e solo se $\alpha > 0$.
Pertanto l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}A > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}}\,dx.$$

Con la sostituzione $t = e^{-Ax}$ e successivamente la sostituzione $\sqrt{\frac{t}{1-t}} = s$, si ha che

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}}\,dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \frac{2}{A}\int_0^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\,ds.$$

Integrando per parti, otteniamo

$$\int \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\,ds = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+s^2}\right)' s\,ds = -\frac{s}{2(1+s^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{ds}{1+s^2} = -\frac{s}{2(1+s^2)} + \frac{\arctan(s)}{2} + c.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}}\,dx = \frac{2}{A}\left[-\frac{s}{2(1+s^2)} + \frac{\arctan(s)}{2}\right]_{0^+}^{+\infty} = \frac{2}{A}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{2A}.$$

In alternativa, dopo la sostituzione $t = e^{-Ax}$, si può porre $u = \sqrt{1-t}$ (così $t = 1-u^2$):

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}}\,dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt = \frac{1}{A}\int_1^0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,(-2udu) = \frac{2}{A}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2A}$$

dove $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$ si può fare ad esempio con la sostituzione $u = \sin(\theta)$, o semplicemente osservando che corrisponde ad un quarto dell'area di un cerchio di raggio 1 e quindi vale $\pi/4$.

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{y(x)(A^2 - x^2)} \\ y(0) = -A \end{cases}$$

con $A > 0$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int y dy = \int \frac{dx}{A^2 - x^2}.$$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{dx}{A^2 - x^2} = \frac{1}{2A} \int \left(\frac{1}{A - x} + \frac{1}{A + x} \right) dx = \frac{1}{2A} \log \left| \frac{A + x}{A - x} \right| + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -A < 0$ si ottiene che $c = A^2/2$ e nell'esplicitare la y è necessario scegliere la radice quadrata con il segno negativo.

Possiamo così concludere che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{A} \log \left(\frac{A + x}{A - x} \right) + A^2}.$$

Anche se non richiesto, si può osservare che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è

$$\left(-A \, \frac{1 - e^{-A^3}}{1 + e^{-A^3}}, A \right)$$

dove l'estremo sinistro è maggiore di $-A$ ed è il valore che annulla l'argomento della radice quadrata.