1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

(a) $y'(x) = \dfrac{x(y^2(x)-1)}{y(x)(x^2+1)}$, (b) $y'(x) = \dfrac{2+y(x)}{\tan(x)}$,

(c) $y'(x) = (x\cos(y(x)))^2$, (d) $y'(x) = y^2(x) - y(x) - 2$.

Svolgimento:

(a) Le soluzioni stazionarie sono

$$y(x) = 1 \quad e \quad y(x) = -1 .$$

Se $y(x) \neq 0, 1, -1$, separiamo le variabili e integriamo

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,dy = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

da cui

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1)$$

e

$$\ln|y^2(x)-1| = \ln(x^2+1) + c_1 = \ln\left((x^2+1)\cdot e^{c_1}\right).$$

Così

$$y^2(x) = 1 \pm c_2(x^2+1) \qquad \text{con } c_2 = e^{c_1} \in \mathbb{R}^+$$

Infine le soluzioni non stazionarie sono

$$y(x) = \pm\sqrt{1 + c(x^2+1)} \quad \text{con } c = \pm c_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\square$

(b) Si ha che $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

La soluzione stazionaria è $y(x) = -2$.

Se $y(x) \neq -2$, separiamo le variabili e integriamo

$$\int \frac{dy}{2+y} = \int \frac{1}{tg(x)}\,dx$$

da cui

$$\ln|2+y(x)| = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, d(\operatorname{sen} x) = \ln|\operatorname{sen} x| + C_1$$

$$\ln|2+y(x)| = \ln|\operatorname{sen} x| \cdot e^{C_1}$$

Quindi le soluzioni non stazionarie sono

$$y(x) = -2 \pm e^{C_1} \operatorname{sen} x = -2 + C \cdot \operatorname{sen} x$$

con $C = \pm e^{C_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

(c) Le soluzioni stazionarie sono

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Se $y(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, separiamo le variabili e integriamo

$$\int \frac{dy}{\cos^2(y)} = \int x^2 dx$$

da cui

$$\operatorname{tg}(y(x)) = \frac{x^3}{3} + C$$

Quindi le soluzioni non stazionarie sono

$$y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) + k\pi$$

con $C \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

(a) Dato che $y^2(x)-y(x)-2=(y(x)-2)(y(x)+1)$ le soluzioni stazionarie sono

$$y(x)=2 \quad e \quad y(x)=-1.$$

Se $y(x)\neq 2,-1$ allora separiamo le variabili e integriamo

$$\int \frac{dy}{(y-2)(y+1)} = \int dx$$

da cui

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+1}\right)dy = x+c_1$$

$$\ln\left|\frac{y(x)-2}{y(x)+1}\right| = 3x+3c_1$$

$$\frac{y(x)-2}{y(x)+1} = \pm e^{3c_1}\cdot e^{3x} = c e^{3x}$$

dove $c=\pm e^{3c_1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Quindi le soluzioni non stazionarie sono

$$y(x)= \frac{2+ce^{3x}}{1-ce^{3x}}$$

con $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\square$

2. Considerare i seguenti due problemi di Cauchy.

$$(1)\ \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + 9t^2 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Risolvere i problemi (1) e (2).

(b) Calcolare per (1) e (2) i seguenti limiti: $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, e $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

Svolgimento:

La matrice del sistema è $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ con polinomio caratteristico

$$(-2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1).$$

Quindi

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

mentre

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) + 2x(t) \\ &= -3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{-t} + 2c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{-t} \\ &= -c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 0 = x(0) = c_1 + c_2 \\ 1 = y(0) = -c_1 + c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1/2 \\ c_2 = 1/2 \end{cases}$$

così la soluzione di (1) è

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}). \end{cases}$$

Per risolvere (2), dalla prima equazione

$$y(t) = 2x(t) + x'(t) - 3t.$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$\left(2x(t)+x'(t)-3t\right)' = x(t)-2\left(2x(t)+x'(t)-3t\right)+9t^2$$

$$2x'(t)+x''(t)-3 = x(t)-4x(t)-2x'(t)+6t+9t^2$$

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t) = 3+6t+9t^2$$

Quindi

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-t}}_{x_{om}(t)} + \underbrace{At^2+Bt+C}_{x_*(t)}$$

Determiniamo $x_*(t)$:

$$2A+4(2At+B)+3(At^2+Bt+C) = 3+6t+9t^2$$

con $\begin{cases} 3A=9 \\ 8A+3B=6 \\ 2A+4B+3C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-6 \\ C=7 \end{cases}$.

Dunque

$$x(t) = c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-t}+3t^2-6t+7$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\left(c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-t}+3t^2-6t+7\right) \\ &\quad +\left(c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-t}+3t^2-6t+7\right)'-3t \\ &= -c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-t}+6t^2-9t+8. \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0=x(0)=c_1+c_2+7 \\ 1=y(0)=-c_1+c_2+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=-7 \end{cases}$$

e la soluzione di (2) è

$$\begin{cases} x(t) = -7e^{-t} + 7 - 6t + 3t^2 \\ y(t) = -7e^{-t} + 8 - 9t + 6t^2 \end{cases}$$

$\square$

Per quanto riguarda (1)

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \,, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t} + e^{-3t}}{e^{-t} - e^{-3t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = 1 .$$

Invece per (2)

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \,, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-7e^{-t} + 8 - 9t + 6t^2}{-7e^{-t} + 7 - 6t + 3t^2} = 2 .$$

$\square$

3. Si consideri il seguente problema,

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = \cos(x) & \text{per } x \in [0, \pi], \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione.

Svolgimento:

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 + \alpha^2$. Dunque

$$\alpha \neq 0 \implies y_{om}(x) = c_1 \operatorname{sen}(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)$$

$$\alpha = 0 \implies y_{om}(x) = C_1 + C_2 x$$

Associamo a $\cos x$ il numero i, così $P(i) \neq 0$ se $\alpha \neq \pm 1$ e i ha molteplicità 1 se $\alpha = \pm 1$:

$$\alpha \neq \pm 1 \implies y_*(x) = A \cos x \implies y_*(x) = \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1}$$

$$\alpha = \pm 1 \implies y_*(x) = A x \cos x \implies y_*(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{2}$$

Così la soluzione generale è

$$\alpha \neq 0, \pm 1 \implies y(x) = C_1 \operatorname{sen}(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1}$$

$$\alpha = 0 \implies y(x) = C_1 + C_2 x - \cos x$$

$$\alpha = \pm 1 \implies y(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) + \frac{x \operatorname{sen} x}{2}.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$

Se $\alpha \neq 0, \pm 1$

$$\begin{cases} C_2 + \dfrac{1}{\alpha^2 - 1} = 0 \\[2ex] C_1 \operatorname{sen}(\alpha \pi) + C_2 \cos(\alpha \pi) - \dfrac{1}{\alpha^2 - 1} = 0 \end{cases}$$

quindi c'è un'unica soluzione se $\operatorname{sen}(\alpha\pi) \neq 0$ ossia $\alpha \notin \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ con

$$C_2 = \frac{1}{1 - \alpha^2} \quad e \quad C_1 = \frac{\cos(\alpha\pi) + 1}{(\alpha^2 - 1)\operatorname{sen}(\alpha\pi)}.$$

Se $\alpha = 0$

$$\begin{cases} c_1 - 1 = 0 \\ c_1 + c_2 \pi + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\dfrac{2}{\pi} \end{cases}$$

quindi c'è un unica soluzione.

Se $\alpha = \pm 1$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \in \mathbb{R} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

quindi non c'è un'unica soluzione.

Riassumendo il problema ha un'unica soluzione sse $\alpha \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. $\square$

4. Per $x > 0$, si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y(x)\,(x - y(x)\ln(x)) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) La funzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(0, +\infty)$?

Svolgimento:

(a) Sia $y(x) = x\,u(x)$, così $y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$ e

$$x^2\left(u(x) + x\,u'(x)\right) = x\,u(x)\left(x - x\,u(x)\ln x\right)$$

$$x\,u'(x) = -u^2(x)\ln x .$$

La condizione iniziale $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 2$ implica che u non è la soluzione stazionaria 0.

Separando le variabili e integrando

$$-\int_2^{u(x)} \frac{du}{u^2} = \int_1^x \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \left[\frac{1}{u}\right]_2^{u(x)} = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2(x) \Rightarrow y(x) = x\,u(x) = \frac{2x}{1+\ln^2(x)}.$$

$\square$

(b)

$$y'(x) = 2\,\frac{1+\ln^2(x) - \cancel{x}\cdot\frac{2\ln x}{\cancel{x}}}{(1+\ln^2 x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$$

quindi $y'(x) \geq 0$ e y' è continua in $(0,+\infty)$.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$. Così per il teo. di Weierstrass, y' è limitata in $(0,+\infty)$.

Quindi y è Lip. e dunque anche unif. continua in $(0,+\infty)$.

$\square$