

Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"
30 Maggio 2018

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

$$(a) y'(x) = \frac{x(y^2(x) - 1)}{y(x)(x^2 + 1)}, \quad (b) y'(x) = \frac{2 + y(x)}{\tan(x)},$$

$$(c) y'(x) = (x \cos(y(x)))^2, \quad (d) y'(x) = y^2(x) - y(x) - 2.$$

2. Considerare i seguenti due problemi di Cauchy.

$$(1) \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + 9t^2 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Risolvere i problemi (1) e (2).

(b) Calcolare per (1) e (2) i seguenti limiti: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

3. Si consideri il seguente problema,

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = \cos(x) & \text{per } x \in [0, \pi], \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione.

4. Per $x > 0$, si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y(x) (x - y(x) \ln(x)) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) La funzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(0, +\infty)$?