1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

(a) $y'(x) = \dfrac{y(x)+2e^x}{e^x+1}$ per $x \in \mathbb{R}$, (b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{1-x^2} + \sqrt{x+1}$ per $x > 1$,

(c) $y'(x) = y(x)\ln(x) + x^x$ per $x > 0$, (d) $y'(x) = \sin(x)\left(\dfrac{y(x)}{\cos(x)} + 4\right)$ per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

(e) $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}\ln(x)$ per $x > 0$, (f) $x^2y''(x) + xy'(x) = y(x)$ per $x > 0$.

Svolgimento:

(a) Sia $a(x) = -(e^x+1)^{-1}$ allora

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{(-e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx = \ln(1+e^{-x})$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = 1+e^{-x}$.

Così

$$D\left((1+e^{-x})\,y(x)\right) = \frac{2e^x\cdot(1+e^{-x})}{e^x+1} = 2\,.$$

Integrando si ottiene

$$(1+e^{-x})\,y(x) = 2x+C \implies y(x) = \frac{2x+C}{1+e^{-x}}\,.$$

□

(b) Sia $a(x) = \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$, allora

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

e il fattore integrante è $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Così

$$D\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,y(x)\right) = \sqrt{x-1}\,.$$

Integrando si ottiene

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,y(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

$$\implies y(x) = C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x+1}\,.$$

□

(c) Sia $a(x) = -\ln x$ allora

$$A(x) = \int a(x)\,dx = -\int \ln x\,dx = -x\ln x + x = \ln\left(x^{-x}\cdot e^{x}\right)$$

e il fattore integrante è $x^{-x}\cdot e^{x}$.

Così $$D\left(x^{-x}e^{x}y(x)\right) = \cancel{x^{x}}\cdot\left(\cancel{x^{-x}}\cdot e^{x}\right) = e^{x}.$$

Integrando si ottiene

$$x^{-x}e^{x}y(x) = e^{x} + C \implies y(x) = x^{x}\left(1 + C\cdot e^{-x}\right).$$

$\square$

(d) Sia $a(x) = -\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ allora

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos(x)} = \ln(\cos x)$$

e il fattore integrante è $\cos x$. Così

$$D\left(\cos x\; y(x)\right) = 4\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) = 2\operatorname{sen}(2x).$$

Integrando si ottiene

$$\cos(x)\,y(x) = \cos(2x) + C$$

$$\implies y(x) = \frac{\cos(2x) + C}{\cos(x)}.$$

$\square$

(e) Il fattore integrante è e^{-2x}. Così

$$D\left(e^{-2x}y(x)\right) = \ln x$$

e integrando si ha che $e^{-2x}y(x) = \int \ln x\,dx + C$

$$\implies y(x) = (x\ln x - x + c)\,e^{2x}.$$

$\square$

f) Notiamo che

$$D(x^2y'-xy) = x^2y'' + 2xy' - y - xy'$$

$$= x^2y'' + xy' - y = 0$$

e quindi $x^2y' - xy = c_1$ ossia, visto che $x>0$,

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = \frac{c_1}{x^2}$$

che è lineare del primo ordine. Dunque

$$\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

e il fattore integrante è $\frac{1}{x}$. Così

$$D\left(\frac{y(x)}{x}\right) = \frac{c_1}{x^3}$$

$$y(x) = x\cdot\left(\int \frac{c_1}{x^3}\,dx + c_2\right) = x\left(+\frac{\tilde{c}_1}{x^2} + c_2 x\right)$$

$$= \frac{\tilde{c}_1}{x} + c_2 x.$$

$\square$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \geq 0$,

$$\begin{cases} y'(x) = |y(x)| + x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Svolgimento:

Intanto osserviamo che per $x>0$

$$y'(x) = |y(x)| + x \geq x > 0.$$

Quindi $y(x)$ è strettamente crescente.

Per continuità $y(x)<0$ in un intorno destro di 0.

Quindi $y(x)$ risolve $y'(x) = -y(x)+x$.

Da cui

$$e^x\left(y'(x)+y(x)\right) = e^x x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x y(x)\right) = e^x \cdot x \overset{\int}{\Longrightarrow} y(x) = x-1+ce^{-x}.$$

Per la condizione iniziale $y(0) = -1+ce^0 = -1$

abbiamo che $c=0$ e $y(x) = x-1$.

Tale soluzione è valida fino a quando $y(x) \leq 0$

ossia per $x \in [0,1]$. Dato che $y(1)=0$ e $y(x)$ è

strettamente crescente, $y(x)>0$ per $x>1$ e $y(x)$

risolve $y(x) = y(x)+x$. Da cui

$$e^{-x}\left(y'(x)-y(x)\right) = e^{-x} x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} y(x)\right) = e^{-x} \cdot x \overset{\int}{\Longrightarrow} y(x) = -x-1+ce^{x}.$$

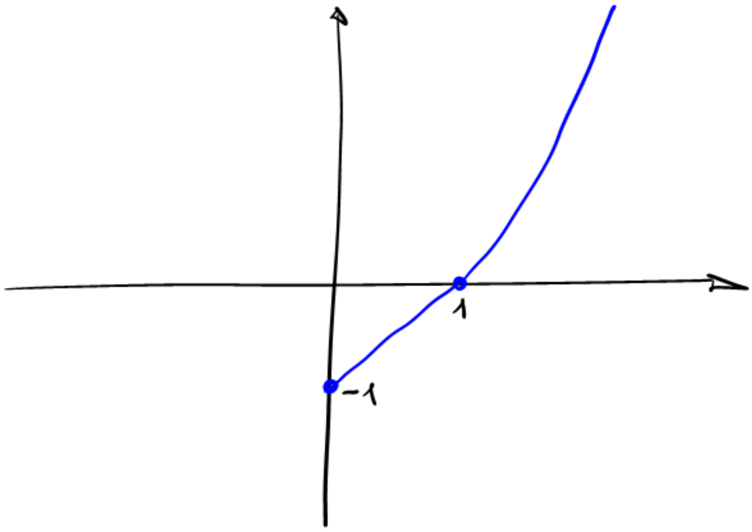
Per la condizione $y(1) = -2+ce^1 = 0$ abbiamo che

$c = 2e^{-1}$ e $y(x) = -x-1+2e^{x-1}$.

Così la soluzione cercata in $[0,+\infty)$ è

$$y(x)=\begin{cases} -x-1+2e^{x-1} & \text{se } x\geq 1 \\ x-1 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

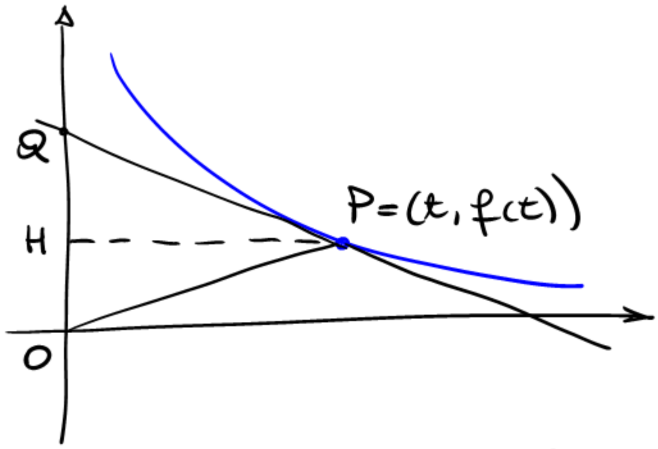
Si noti che, pur essendo definita a tratti, $y(x)\in C^1([0,+\infty))$ perché $y'_+(1)=1=y'_-(1)$.



$\square$

3. Determinare tutte le funzioni derivabili $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tali che per ogni punto P del loro grafico, l'area del triangolo $\triangle OPQ$ è uguale ad 1, dove O è l'origine e Q è l'intersezione della retta tangente in P con l'asse delle y.

Svolgimento:



La retta PQ è tangente al grafico di f in P.

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \overset{x=0}{\Longrightarrow} Q = (0, -tf'(t) + f(t))$$

Così per $t > 0$

$$2 = 2\,\text{Area}(OPQ) = |PH| \cdot |QO| = t\,|-tf'(t) + f(t)|$$

ossia

$$f'(t) - \frac{f(t)}{t} = \pm \frac{2}{t^2}$$

Il fattore integrante è $\exp\left(\int -\frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{t}$.

Quindi

$$D\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \pm \frac{2}{t^3} \overset{\int}{\Longrightarrow} \frac{f(t)}{t} = \mp \frac{1}{t^2} + c$$

Così $f(t) = \mp \frac{1}{t} + ct$ con $c \in \mathbb{R}$.

Imponendo che $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ si ottiene

$$f(t) = \frac{1}{t} + ct \quad \text{con } c \geqslant 0.$$

$\square$

4. Sia $y \in C^1([0,+\infty))$ una funzione che soddisfa la disuguaglianza

$$\forall x \geq 0, \qquad y'(x) \leq a(x)y(x)$$

dove $a \in C([0,+\infty))$.

(a) Dimostrare che la funzione

$$R(x) = \frac{y(x)}{\exp(\int_0^x a(t)dt)}$$

è decrescente in $[0,+\infty)$.

(b) Dimostrare che per ogni $x \geq 0$,

$$y(x) \leq y(0)\exp\left(\int_0^x a(t)dt\right).$$

(c) Dimostrare che se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \geq 0$, $a(x) < -L$ e $y(x) \geq 0$ allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} y(x)\, dx$$

è convergente.

Svolgimento:

(a) Sia $F(x) = \exp\left(\int_0^x a(t)dt\right)$ allora

$$F'(x) = F(x) \cdot a(x)$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{F(x)}\right) = \frac{y'(x)F(x) - y(x)\cdot F'(x)}{F^2(x)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{F(x)}}_{>0}\left(\underbrace{y'(x) - a(x)y(x)}_{\leq 0 \text{ per ipotesi}}\right) \leq 0$$

Così la funzione $\frac{y(x)}{F(x)}$ è decrescente in $[0,+\infty)$. $\square$

(b) Per la decrescenza dimostrata in (a)

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{y(0)}{F(0)} \geq \frac{y(x)}{F(x)}$$

ossia

$$y(x) \leq y(0)\frac{F(x)}{F(0)} \overset{F(0)=1}{=} y(0)\exp\left(\int_0^x a(t)dt\right). \quad \square$$

(c) Per ipotesi $\forall x \geq 0$

$$y'(x) \leq a(x)\, y(x) < -L\, y(x)$$

e per (b)

$$0 \leq y(x) \leq y(0) \exp(-Lx).$$

Così

$$\int_0^{+\infty} y(x) \leq y(0) \int_0^{+\infty} e^{-Lx} dx = y(0) \left[\frac{e^{-Lx}}{-L} \right]_0^{+\infty} = \frac{y(0)}{L}$$

e quindi l'integrale è convergente $\square$