

Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

9 Maggio 2018

1. Per ciascuna successione di funzioni $\{f_n\}_{n \geq 1}$, determinare il limite puntuale negli intervalli indicati e verificare se la convergenza è anche uniforme.

$$(a) f_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+n^2x^2} \text{ in } [0, +\infty), \quad (b) f_n(x) = nx^2e^{-nx} \text{ in } [0, +\infty),$$

$$(c) f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ in } [0, 1], \quad (d) f_n(x) = \sqrt[n]{1+|x|^n} \text{ in } \mathbb{R},$$

$$(e) f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \text{ in } (0, 1), \quad (f) f_n(x) = (n^2x + 1)e^{-nx^2} \text{ in } [-1, 1].$$

2. Dimostrare le seguenti affermazioni.

$$(a) \text{ Per } x < 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}^+, \quad \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

$$(b) \text{ Per } x \in (-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

3. Calcolare i seguenti limiti.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^3(\ln(x))^2}{x^n} dx,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{n(1 - \cos(x))}{n^2x^2 + 1} dx, \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{4 + nx^n}{4 - x^2} dx.$$

4. Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di funzioni in $C([0, +\infty))$ che converge uniformemente in $[0, +\infty)$ alla funzione f . Inoltre per ogni $x \geq 0$ e per ogni $n \geq 1$ si ha che $0 < f_n(x) \leq 1$ e $f(x) > 0$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) La successione $\{f_n^2\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in $[0, +\infty)$ a f^2 .

(b) La successione $\{1/f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in $[0, +\infty)$ a $1/f$.

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$