1. Determinare la somma delle seguenti serie.

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n2^n+n^2}{(n+1)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$,   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n/5\rfloor}}{2^n}$.

Svolgimento:

(a) $$\sum_{n=3}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=3}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=3}^{N} \ln(n-1) + \sum_{n=3}^{N} \ln(n+1) - 2\sum_{n=3}^{N} \ln(n)$$

$$= \sum_{n=2}^{N-1} \ln(n) + \sum_{n=4}^{N+1} \ln(n) - 2\sum_{n=3}^{N} \ln(n)$$

$$= \ln(2) - \ln(N) - \ln(3) + \ln(N+1)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{3}\right). \qquad \square$$

(b) Ricordiamo che $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1-1)\cdot 2^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - \frac{1}{2}\left(e^2-1\right) = \frac{e^2+1}{2}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n-(n+1)+1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= e - (e-1) + (e-(1+1)) = e-1.$$

Quindi $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n2^n+n^2}{(n+1)!} = 4\cdot\frac{e^2+1}{2} + e - 1 = 2e^2+e+1. \qquad \square$$

(c) Notiamo che

$$\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n} = \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{N+1} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - 1 - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{N\to+\infty} 2.$$

$\square$

(d) Notiamo che

$$\left\lfloor \frac{2^1}{5} \right\rfloor = 0, \quad \left\lfloor \frac{2^2}{5} \right\rfloor = 0, \quad \left\lfloor \frac{2^3}{5} \right\rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{2^4}{5} \right\rfloor = 3$$

Inoltre per $n \geq 1$

$$\frac{2^{n+4}}{5} = \frac{2^n}{5} \cdot 16 = \frac{2^n}{5}(3\cdot 5+1) = 3\cdot 2^n + \frac{2^n}{5}.$$

Quindi $\left\lfloor \frac{2^{n+4}}{5} \right\rfloor = \underbrace{3\cdot 2^n}_{\text{PARI}} + \left\lfloor \frac{2^n}{5} \right\rfloor$ e

$$\left\lfloor \frac{2^n}{5} \right\rfloor = \begin{cases} \text{PARI} & \text{se } n \equiv 1,2 \pmod 4 \\ \text{DISPARI} & \text{se } n = 0,3 \pmod 4. \end{cases}$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{2^n}{5} \right\rfloor}}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+3}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{3}{5}.$$

$\square$

2. Determinare quali serie sono convergenti.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n) + \sqrt{n}}{\ln(n+1)(2n^2+1-n^2\sin(n))}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left((n\sin(1/n))^{3n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Svolgimento:

(a) Sia a_n il termine generico della serie.
Dato che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$ e $|\sin n| \leq 1$,
a_n è definitivamente positivo. Inoltre

$$a_n \leq \frac{\ln(n) + \sqrt{n}}{\ln(n+1)(n^2+1)} \sim \frac{\sqrt{n}}{\ln n \cdot n^2} = \frac{1}{n^{3/2} \cdot \ln n}$$

$\frac{3}{2} > 1$ e i criteri del confronto e del confronto asintotico implicano che la serie $\sum a_n$ CONVERGE. $\square$

(b) Notiamo che per $n \geq 2$

$$0 < (\ln n)^{\ln n} = \exp(\ln n \cdot \ln(\ln n)) = n^{\ln(\ln n)}.$$

Ora se $n > \exp(e^2) \approx 1618$, $\ln(\ln n) > 2$ e

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$$

e quindi per confronto la serie data CONVERGE. $\square$

(c) Notiamo che

$$\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{3n}$$

$$= \exp\left(3n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(3n\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Inoltre,

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Quindi

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{4n^2}$$

e dunque definitivamente $a_n > 0$ e per il confronto asintotico, dato che $2 > 1$, la serie data CONVERGE. $\square$

(d) Sia $a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \binom{2(n+1)}{n+1} \cdot 4^n \binom{2n}{n}^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{4}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n+1} = 1 - \frac{1/2}{n+1} < 1$$

quindi a_n è decrescente. Inoltre per Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e dunque

$$a_n \sim \frac{1}{4^n}\sqrt{2\pi \cdot 2n}\;\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{e^n}{n^n}\right)^2$$

$$\sim \frac{\cancel{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot\cancel{4^n}\cdot\cancel{n^{2n}}\cdot\cancel{e^{2n}}}{\cancel{4^n}\,\cancel{e^{2n}}\,\cancel{2}\pi n\cdot\cancel{n^{2n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \to 0.$$

Così la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è CONVERGENTE per il criterio di Leibniz. □

(e) Sia $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$. Allora

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$

e per il criterio della radice n-sima la serie è CONVERGENTE. □

(f) Abbiamo che per $n \geq 2$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{n-1} = \frac{(-1)^n n}{(n-1)\sqrt{n}} - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}} - \frac{1}{n-1}.$$

Dato che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}}$$

convergono per Leibniz e

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = +\infty$$

si conclude che la serie data DIVERGE a $-\infty$.

$\square$

3. Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successioni di numeri reali.
Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

(a) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(b) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ converge.

(c) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n|$ converge allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito.

(d) Se $0 < a_n < 1/n$ per ogni $n \geq 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(e) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(|a_n|, \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Svolgimento:

(a) FALSO. Ad esempio se $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$ converge per Leibniz mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \qquad \square$$

(b) VERO. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è convergente allora $a_n \to 0$ e definitivamente $|a_n| < 1$ e dunque $|a_n^3| \leq |a_n|$ così per confronto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ è assolutamente convergente e quindi anche convergente. $\square$

(c) VERO. Per il criterio dell'assoluta convergenza anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_n)$ è convergente. Inoltre

$$a_N = a_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_{n+1}-a_n)$$

e quindi $$\lim_{N\to+\infty} a_N = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_n) \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

(d) FALSO. Ad esempio se per $n \geq 1$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

allora $0 < a_n < \frac{1}{n}$ e

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n a_n = -\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}}_{\text{diverge}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2}}_{\text{converge}} \xrightarrow{N\to+\infty} -\infty .$$

$\square$

(e) FALSO. Ad esempio se

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ $(a_n \geq 0$ e $a_n \not\to 0)$.

Invece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(|a_n|, \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 .$$

$\square$

4. Sia f una funzione continua in $[0,+\infty)$ e si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$, con

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x)dx.$$

Rispondere alle seguenti domande.

(a) Se $f(x) = e^{-x}$ quanto vale $\lim_{n\to\infty} a_n$?

(b) Se f è positiva e decrescente allora il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito?

(c) Se f è limitata in $[0,+\infty)$ allora la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è limitata?

Svolgimento:

(a) $$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} - \int_0^n e^{-x}dx = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} + \left[e^{-x}\right]_0^n$$

$$= \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} + e^{-n} - 1 \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e-1}. \quad \square$$

(b) SI. Basta verificare che $\{a_n\}_n$ è crescente e superiormente limitata.

1) $\{a_n\}_n$ è crescente:

$$a_{n+1} - a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \underbrace{(f(n)-f(x))}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

2) $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k-1}^{k} f(x)dx}_{\geq f(k)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$= f(0) - f(n) \leq f(0). \quad \square$$

(c) NO, non sempre. Ad esempio se $f(x) = \cos(2\pi x)$ allora f è limitata ma

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \int_0^n \cos(2\pi x)dx = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty. \quad \square$$