1. Calcolare i seguenti integrali impropri.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{7x+2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}+x)^2}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2^x-8}}$;

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{15x^2+x-3}{(x^2-x+2)(16x^2-1)}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+1/x}}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh(x)+\cosh(x)}{2+\sin(\pi(1+e^x))}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln|1-x^2|}{(1+2|x|)^2}\,dx$.

Svolgimento:

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{7x+2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}+x)^2}\,dx \underset{\substack{\sqrt{x}=t\\ dx=2t\,dt}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{(7t^2+2)\cdot 2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(1+t+t^2)^2}$$

$$\frac{14t^2+4}{(1+t+t^2)^2} \overset{He}{=} \frac{At+B}{1+t+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{Ct+D}{1+t+t^2}\right)$$

$$= \frac{(At+B)(1+t+t^2)}{(1+t+t^2)^2} + \frac{C(1+t+t^2)-(Ct+D)(1+2t)}{(1+t+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+C-D=4\\ A+B-2D=0\\ A+B-C=14\\ A=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0\\ B=12\\ C=-2\\ D=6\end{cases} .$$

Inoltre

$$\int\frac{dt}{1+t+t^2} = \int\frac{dt}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C .$$

Così

$$\int_0^{+\infty}\cdots = \left[\frac{24}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{-2t+6}{1+t+t^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}+6\right) = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} - 6 .$$

□

(b) $$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2^x-8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2^{x-3}-1}}$$

$$\underset{t=2^{x-3}-1}{=} \frac{1}{\sqrt{8}\ln 2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} \underset{s=\sqrt{t}}{=} \frac{1}{\sqrt{8}\ln 2} \int_0^{+\infty} \frac{2\cancel{s}\,ds}{(1+s^2)\cdot \cancel{s}}$$

$$\ln(t+1) = (x-3)\ln 2 \qquad s^2 = t$$

$$\frac{dt}{t+1} = dx \cdot \ln 2 \qquad 2s\,ds = dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{8}\ln 2} \Big[\operatorname{arctg}(s)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\ln 2}$$ □

(c) Abbiamo che

$$\frac{15x^2+x-3}{(x^2-x+2)(16x^2-1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+2}$$

da cui si ricava $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$, $D = 1$.
Inoltre

$$\int \frac{dx}{x^2-x+2} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + c.$$

Quindi

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \cdots = \left[\frac{1}{8}\ln\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right) + \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{\pi}{\sqrt{7}} - \frac{\ln 3}{8}.$$ □

(d) Notiamo che $x^{1+\frac{1}{x}}>0$ in $[1,+\infty)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

Quindi $\frac{1}{x^{1+1/x}} \sim \frac{1}{x}$ e per il criterio del confronto asintotico, dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, anche $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}}\,dx = +\infty$.

$\square$

(e) Intanto

$$\operatorname{senh}(x)+\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2} = e^x.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \cdots \underset{\substack{t=e^x \\ \ln t = x \\ \frac{dt}{t}=dx}}{=} \int_0^1 \frac{\cancel{t}}{2+\underbrace{\operatorname{sen}(\pi(1+t))}_{-\operatorname{sen}(\pi t)}} \cdot \frac{dt}{\cancel{t}} \underset{\substack{s=\pi t \\ ds=\pi\,dt}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{ds}{2-\operatorname{sen}(s)}$$

$$\underset{\substack{\operatorname{tg}(\frac{s}{2})=z \\ ds=\frac{2dz}{1+z^2} \quad \operatorname{sen} s = \frac{2z}{1+z^2}}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2-\frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1-z+z^2}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

$\square$

(f) $$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln|1-x^2|}{(1+2|x|)^2}\,dx = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{(1+2|x|)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{(1+2x)^2}\,dx$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{(1+2x)^2}\,dx$$

Ora

$$\int \frac{\ln(1-x^2)}{(1+2x)^2}\,dx = \int \ln(1-x^2)\, d\left(\frac{-1/2}{1+2x}\right)$$

$$= \ln(1-x^2)\cdot \frac{-1/2}{1+2x} + \frac{1}{\cancel{2}}\int \frac{1}{1+2x}\cdot\frac{-\cancel{2}x\,dx}{1-x^2}$$

e $$\frac{-x}{(1+2x)(1-x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

con $A = \frac{2}{3}$, $B = -1/6$, $C = -1/2$.

Così

$$I_1 = 2\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{1+2x} + \frac{1}{3}\ln(1+2x) + \frac{1}{6}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{3}\ln(1-x^2) + \frac{1}{3}\ln(1-x)\right) + \frac{2}{3}\ln 3 - \ln 2$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\ln 3 - \ln 2$$

$$= \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{4}{3}\ln 2.$$

In modo simile

$$I_2 = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(x^2-1)}{1+2x} + \frac{1}{3} \ln(1+2x) + \frac{1}{6} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(1+x) \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{(1+2x)^2 (x-1)}{(1+x)^3} \right) - \left(\frac{\ln 3}{3} - \frac{2 \ln 2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \ln 4 - \frac{\ln 3}{3} + \frac{2 \ln 2}{3} = \ln 2 - \frac{\ln 3}{3} .$$

Infine

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{2}{3} \ln 3 - \frac{4}{3} \ln 2 \right) + \left(\ln 2 - \frac{\ln 3}{3} \right)$$

$$= \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{3} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3}{2}\right) .$$

$\square$

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ i seguenti integrali impropri sono convergenti.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\ln(x)|^\alpha}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(x)}{\sqrt[3]{x}\,|\sin(x)|^\alpha}\,dx$.

Svolgimento:

(a) Sia $f(x)$ la funzione integranda.

$f(x) \geq 0$ per $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{1-\frac{1}{e}}{x^{\frac{1}{3}}\,|\ln(x)|^\alpha} \overset{\frac{1}{3}<1}{\Longrightarrow} f \text{ è integrabile in } \left(0,\tfrac{1}{2}\right),\ \forall \alpha>0$$

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{\frac{1}{3}}\,|\ln(x)|^\alpha} \sim \frac{1}{x^{7/3}\,|\ln(x)|^\alpha} \overset{7/3>1}{\Longrightarrow} f \text{ è integrabile in } (2,+\infty),\ \forall \alpha>0$$

Per $x \to 1^\pm$

$$f(x) \sim \frac{1-1/\sqrt{e}}{|\ln(1+(x-1))|^\alpha} \sim \frac{c}{|x-1|^\alpha} \Longrightarrow f \text{ è integrabile in } \left(\tfrac{1}{2},1\right) \text{ e } (1,2) \text{ sse } \alpha<1.$$

Quindi l'integrale improprio converge sse $\alpha \in (0,1)$. □

(b) Sia $f(x)$ la funzione integranda.

Allora $f(x) \geq 0$ in $(0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Inoltre per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \cdot \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^{\alpha-\frac{5}{3}}}$$

e f è integrabile in $(0,\varepsilon)$ sse $\alpha - \frac{5}{3} < 1$

ossia $\alpha < \frac{8}{3}$.

Per $x \to 2\pi^-$

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{2}(x-2\pi)^2}{(2\pi)^{1/3}|x-2\pi|^\alpha} \sim \frac{c}{|x-2\pi|^{\alpha-2}}$$

e f è integrabile in $(2\pi-\varepsilon, 2\pi)$ sse $\alpha-2<1$ ossia $\alpha<3$.

Per $x \to \pi^\pm$

$$f(x) \sim \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}\,|x-\pi|^\alpha} \sim \frac{c}{|x-\pi|^\alpha}$$

e f è integrabile in $(\pi-\varepsilon, \pi)$ e $(\pi, \pi+\varepsilon)$ sse $\alpha<1$. Quindi l'integrale improprio converge sse $\alpha \in (0,1)$. $\square$

3. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ è convergente mentre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$ diverge.

(b) Se f è una funzione continua in $[0,+\infty)$, periodica di periodo $T>0$ e tale che $\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx = 0$ allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ è convergente.

Svolgimento:

(a) Abbiamo che $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ è finito perché $\operatorname{sen}(x^2)$ è continua in $[0,\sqrt{\pi}]$. Inoltre

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x^2=t \\ x=\sqrt{t},\ dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}}}{=} \int_{\pi}^{+\infty} \operatorname{sen}(t)\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{d(-\cos t)}{2\sqrt{t}}$$

$$= \left[-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{4t^{3/2}}\,dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt$$

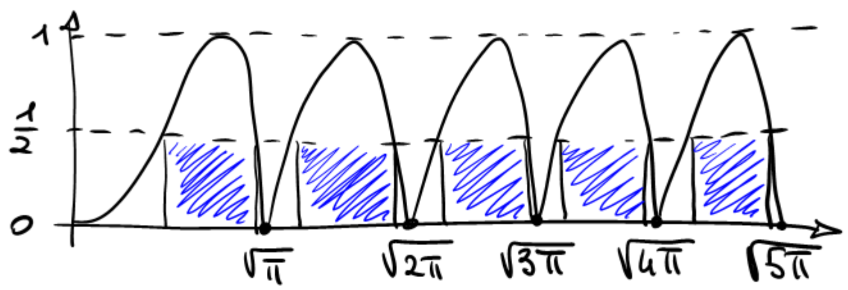
che è finito perché per $t \geq \pi$

$$0 \leq \frac{|\cos t|}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \text{con } \frac{3}{2} > 1$$

e dunque $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt$ è assolutamente convergente.

Quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ è convergente.

Notiamo che il grafico di $|\operatorname{sen} x^2|$ è



$$|\operatorname{sen}(x^2)| = \frac{1}{2} \text{ sse } x = \sqrt{\frac{\pi}{6}+n\pi} \ \vee\ x = \sqrt{\frac{5\pi}{6}+n\pi} \text{ con } n\in\mathbb{N}.$$

Quindi per $N \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} |\operatorname{sen}(x^2)|\,dx \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{6}\pi + n\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{6} + n\pi}\right)$$

(area dell' n-esimo rettangolo blu)

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{N} \frac{\frac{4}{6}\pi}{\sqrt{\frac{5}{6}\pi + n\pi} + \sqrt{\frac{\pi}{6} + n\pi}} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\sqrt{n\pi}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{6}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{\pi}}{6}\int_1^{N+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\left(\sqrt{N+1} - 1\right) \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$$

$\square$

(b) Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Se $kT \leq x \leq (k+1)T$ con $k \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \int_0^{kT} f(t)\,dt + \int_{kT}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{kT}^{x} f(t)\,dt$$

e quindi

$$|F(x)| \leq \int_{kT}^{x} |f(t)|\,dt \leq MT \quad \text{con } M = \max_{[0,T]} |f(x)|.$$

Dato che f è continua, $F'(x) = f(x)$ e per $t \geq 0$

$$\int_0^t \frac{f(x)}{x+1}\,dx = \left[\frac{F(x)}{x+1}\right]_0^t + \int_0^t \frac{F(x)}{(x+1)^2}\,dx$$

Ora

$$\left|\left[\frac{F(x)}{x+1}\right]_0^t\right| = \frac{|F(t)|}{t+1} \leq \frac{MT}{t+1} \to 0 \quad \text{per } t \to +\infty$$

Mentre

$$\left|\frac{F(x)}{(x+1)^2}\right| \leq \frac{MT}{(x+1)^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{(x+1)^2}\,dx \text{ è assolutamente convergente}$$

Quindi $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ è convergente. $\square$

4. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$.
Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

(a) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, dt = a$.

(b) Se $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = a \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) Se $\int_0^{+\infty} f(ax)\, dx = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ allora f è identicamente nulla.

(d) Se $\int_1^{+\infty} f(ax)\, dx = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ allora f è identicamente nulla.

Svolgimento:

(a) VERO. Per definizione di limite, per $\varepsilon > 0$ $\exists R > 0$ tale che per $t \geq R$, $a-\varepsilon \leq f(t) \leq a+\varepsilon$.

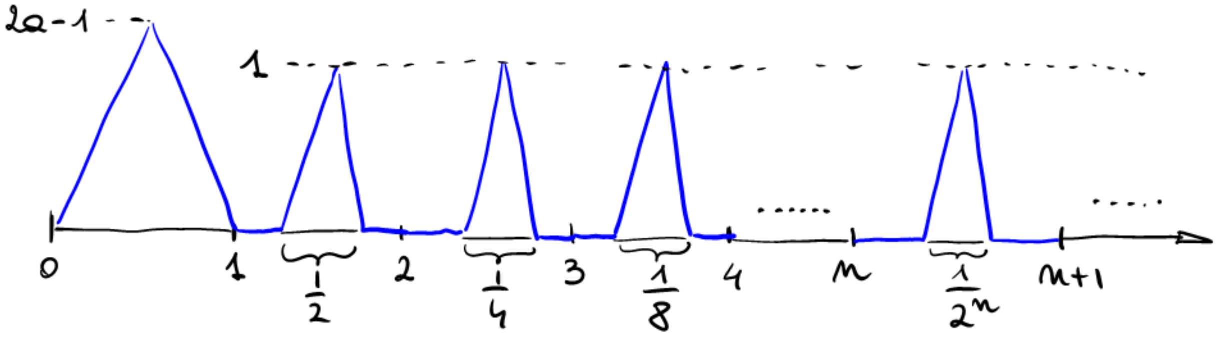
Quindi per $x \geq R$,

$$a-\varepsilon = \int_x^{x+1} (a-\varepsilon)\, dt \leq \int_x^{x+1} f(t)\, dt \leq \int_x^{x+1} (a+\varepsilon)\, dt = a+\varepsilon$$

e dunque
$$\left| \int_x^{x+1} f(t)\, dt - a \right| \leq \varepsilon$$

ossia $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, dt = a$. $\square$

(b) FALSO. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che



allora $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (e quindi $f(x) \not\to 0$) e

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}(2a-1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = a - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = a.$$

Altri esempi si possono costruire usando le funzioni $\cos(x^\alpha)$ per $\alpha > 1$ (vedi 2(d)). $\square$

(c) FALSO. Per $a>0$,

$$\int_0^{+\infty} f(ax)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ t=ax}}{=} \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0 \iff \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$$

Quindi se

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi x) & \text{per } x\in[0,1] \\ 0 & \text{per } x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

allora f non è identicamente nulla e

$$0 = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(ax)\,dx .$$

$\square$

(d) VERO. Per $a>0$,

$$\int_1^{+\infty} f(ax)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ t=ax}}{=} \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = 0 \iff \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = 0 \quad (*)$$

Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ allora per ipotesi

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt + F(1) = 0 + F(1) = F(1)$$

e per ogni $a>0$

$$0 = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(1) - F(a).$$

Quindi la funzione integrale F è costante.
Per il teo. fondamentale del calcolo integrale

$$f(x) = F'(x) = 0 \quad \forall x \geqslant 0 .$$

$\square$