

Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

18 Aprile 2018

1. Calcolare i seguenti integrali impropri.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{7x+2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}+x)^2} dx ; & \text{(b)} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2^x-8}} ; \\ \text{(c)} \int_{1/2}^{+\infty} \frac{15x^2+x-3}{(x^2-x+2)(16x^2-1)} dx ; & \text{(d)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+1/x}} ; \\ \text{(e)} \int_{-\infty}^0 \frac{\sinh(x)+\cosh(x)}{2+\sin(\pi(1+e^x))} dx ; & \text{(f)} \int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln|1-x^2|}{(1+2|x|)^2} dx . \end{array}$$

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ i seguenti integrali impropri sono convergenti.

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}|\ln(x)|^\alpha} dx ; \quad \text{(b)} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(x)}{\sqrt[3]{x}|\sin(x)|^\alpha} dx .$$

3. Dimostrare le seguenti affermazioni.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ è convergente mentre } \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \text{ diverge.} \\ \text{(b)} \text{ Se } f \text{ è una funzione continua in } [0, +\infty), \text{ periodica di periodo } T > 0 \text{ e tale che} \\ \int_0^T f(x) dx = 0 \text{ allora } \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+1} dx \text{ è convergente.} \end{array}$$

4. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$.

Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \text{ Se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = a. \\ \text{(b)} \text{ Se } \int_0^{+\infty} f(x) dx = a \in \mathbb{R} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \\ \text{(c)} \text{ Se } \int_0^{+\infty} f(ax) dx = 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}^+ \text{ allora } f \text{ è identicamente nulla.} \\ \text{(d)} \text{ Se } \int_1^{+\infty} f(ax) dx = 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}^+ \text{ allora } f \text{ è identicamente nulla.} \end{array}$$