

Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

11 Aprile 2018

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx, & \quad \text{(b)} \int \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx, \\ \text{(c)} \int \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx, & \quad \text{(d)} \int \frac{2e^{4x}}{e^{2x} + 1 - 2 \cosh(x)} dx, \\ \text{(e)} \int \frac{\arctan(x)}{(x+1)^2} dx, & \quad \text{(f)} \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_1^e \frac{\ln(1 + \ln^2(x))}{x} dx, & \quad \text{(b)} \int_{-8}^{10} \sqrt{1 + \sqrt{|x-1|}} dx, \\ \text{(c)} \int_{-1}^3 \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 3)^2} dx, & \quad \text{(d)} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{6 + xe^{x^2}}{\cos^3(x)} dx, \\ \text{(e)} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \ln^2(e \sin(x)) \cos(x) dx, & \quad \text{(f)} \int_{1/4}^4 \frac{dx}{1 + \lfloor 1/x \rfloor}. \end{aligned}$$

3. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(a) Se f è continua in $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0,$$

allora f è identicamente nulla in $[a, b]$.

(b) Se f è convessa in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$ e

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

4. Sia $F(t) = \int_t^{t^2} e^{-x^2} dx$. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

(a) La derivata prima di F si annulla almeno due volte in \mathbb{R} .

(b) F ammette un punto di minimo assoluto in \mathbb{R} .

(c) F ammette un punto di massimo assoluto in \mathbb{R} .

(d) Esiste $a > 0$ tale che F è strettamente convessa in $[a, +\infty)$.

(e) $\frac{5}{4} < F(-1) < \frac{5}{3}$.