Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

28 Marzo 2018

1. Si consideri la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e tre punti distinti A, B e C del suo grafico tali che la retta tangente alla parabola in C sia parallela al segmento AB. Dimostrare che l'area delimitata dal grafico della parabola e dal segmento AB è uguale a 4/3 dell'area del triangolo ABC.

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

(a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx\,,$

(c) $\displaystyle\int \sin^4(x)\cos^3(x)\, dx\,,$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3+2x^2-x-2}\, dx\,,$

(e) $\displaystyle\int x\cos(x)e^{-x}\, dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\, dx\,,$

(g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+x^2\ln(x)}\, dx\,,$ (h) $\displaystyle\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 dx\,.$

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Esiste un polinomio $P \in \mathbb{Z}[x]$ non identicamente nullo tale che $\int_0^1 e^x P(x)\, dx = 0$.

(b) Se f è una funzione derivabile con la derivata continua in $[0,1]$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ allora esiste $t \in [0,1]$ tale che

$$f'(t) = \int_0^1 f(x)dx.$$

(c) Se f è una funzione continua in $[0,1]$ allora esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx.$$

(d) Se f è una funzione continua in $[0,1]$ tale che per ogni $t \in [0,1]$,

$$\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx$$

allora f è identicamente zero in $[0,1]$?

4. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2+k^2}\,,$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{\sqrt{nk}}\,,$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n^3e^{-2k/n}+5k^3}{n^4+3}\,,$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\,.$