1. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^4 \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2x}\right)$, (b) $\lim_{x\to2} \frac{x\ln^2(x/2)-\sin((x^2-4)^2)}{((x-1)^2-1)^2}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} n(1-2(2-\sqrt[n]{2})^n)$, (d) $\lim_{x\to0} \frac{x^3(1-\cos(\sin(x)))}{\arctan(x)-\sin(\sin(x))}$.

Svolgimento:

(a) Sia $x=\frac{1}{t}$ così $t\to0^+$ e il limite diventa

$$\lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^4} \ln\left(\frac{1}{2}\left((1+t^2)^{1/2}+(1-t^2)^{1/2}\right)\right).$$

Abbiamo che

$$(1+t^2)^{1/2}+(1-t^2)^{1/2} = 1+\cancel{\tfrac{1}{2}t^2}-\frac{1}{8}t^4+1+\cancel{\tfrac{1}{2}(-t^2)}-\frac{1}{8}(-t^2)^2+o(t^4)$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{8}t^4+o(t^4)\right)$$

e

$$\frac{1}{t^4}\ln\left(\frac{1}{2}\left((1+t^2)^{1/2}+(1-t^2)^{1/2}\right)\right) = \frac{1}{t^4}\ln\left(1-\frac{1}{8}t^4+o(t^4)\right)$$
$$= \frac{1}{t^4}\left(-\frac{1}{8}t^4+o(t^4)\right) \xrightarrow{t\to0^+} -\frac{1}{8}. \qquad \square$$

(b) Sia $t=x-2$ così $t\to0$ e il limite diventa

$$\lim_{t\to0} \frac{(t+2)\ln^2(1+t/2)-\operatorname{sen}((t^2+4t)^2)}{(t^2+2t)^2}.$$

Ora

$$\ln^2\left(1+\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^2+o(t^2), \quad \operatorname{sen}((t^2+4t)^2)=16t^2+o(t^2),$$
$$(t^2+2t)^2=4t^2+o(t^2).$$

Quindi

$$\lim_{t\to0} \frac{(t+2)t^2/4-16t^2+o(t^2)}{4t^2+o(t^2)} = \frac{\frac{1}{2}-16}{4} = -\frac{31}{8}. \qquad \square$$

(c) Poniamo $n = \frac{1}{x}$ così $x \to 0^+$ e il limite è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1-2\left(2-\exp(x\ln 2)\right)^{\frac{1}{x}}\right).$$

Ora

$$\left(2-\exp(x\ln 2)\right)^{\frac{1}{x}} = \left(2-\left(1+x\ln 2+\frac{x^2(\ln 2)^2}{2}+o(x^2)\right)\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1-x\ln 2-\frac{x^2(\ln 2)^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x}\left(-x\ln 2-\frac{x^2(\ln 2)^2}{2}-\frac{(-x\ln 2)^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\ln 2-x(\ln 2)^2+o(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(-x(\ln 2)^2+o(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-x(\ln 2)^2+o(x)\right).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\left(1-x(\ln 2)^2+o(x)\right)\right) = (\ln 2)^2.$$

□

(d) Abbiamo che per $x \to 0$

$$\cos(\operatorname{sen}(x)) = \cos(x+o(x^2)) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$

$$= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{3x^5}{6}\right)+\frac{1}{120}\cdot(x)^5+o(x^5)$$

$$= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

Infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)}{\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{5}-\left(\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{10}\right)+o(x^5)} = \frac{1/2}{1/10} = 5.$$

□

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Se la funzione $\ln(f)$ è convessa in $\mathbb{R}$ allora anche la funzione f è convessa in $\mathbb{R}$?

(b) Esiste un polinomio di secondo grado $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tale che la funzione $\ln(P)$ è convessa in $\mathbb{R}$?

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e strettamente convessa in $\mathbb{R}$. Allora per ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, f(x_0))$ è l'unico punto di intersezione tra il grafico di f e la retta tangente in x_0?

(d) Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia limitata e strettamente convessa in $\mathbb{R}$?

(e) Esistono due funzioni f e g tali che f è strettamente convessa in $\mathbb{R}$, g è strettamente concava in $\mathbb{R}$ e $\sin(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) SI. Infatti anche la funzione $\ln(f)$ è derivabile due volte e

$$\ln(f) \xrightarrow{D} \frac{f'}{f} \xrightarrow{D} \frac{f''\cdot f - (f')^2}{f^2} \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

$\uparrow$ $\ln(f)$ è convessa

Da cui, dato che $f>0$ si ha che in $\mathbb{R}$

$$f'' \geq \frac{(f')^2}{f} \geq 0 \Rightarrow f \text{ è convessa in } \mathbb{R}$$

$\square$

(b) NO. Si ha che $P(x) = ax^2 + bx + c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se $a>0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Inoltre $D^2(\ln P) \geq 0$ se e solo se $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P''(x) \cdot P(x) = 2a \cdot (ax^2+bx+c) \geq (2ax+b)^2 = (P'(x))^2$$

ossia $-2a^2x^2 - 2abx + 2ac - b^2 \geq 0$ che non può valere per $x \to +\infty$ in quanto $-2a^2 < 0$. $\square$

(c) SI. La retta tangente in x_0 al grafico di f

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

passa per $(x_0, f(x_0))$. Se tale retta passasse anche per un altro punto $(x_1, f(x_1))$ si avrebbe

$$f(x_1) = f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0)$$

ossia

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1-x_0).$$

Per Lagrange $\exists\, t$ strettamente compreso tra x_1 e x_0 tale che $f(x_1) - f(x_0) = f'(t)(x_1-x_0)$.

Quindi $f'(t) = f'(x_0)$ contro il fatto che f' è iniettiva per la stretta crescenza. $\square$

(d) NO. Se f è strettamente convessa allora f non è costante e esistono $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$ e dunque $R_f(x_1,x_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$

Se $R_f(x_1,x_2) > 0$ (il caso <0 è analogo) allora per $x > x_2$, per la convessità di f,

$$R_f(x_2, x) \geq R_f(x_1, x_2)$$

e quindi per $x \to +\infty$

$$f(x) \geq R_f(x_1,x_2)(x-x_2) + f(x_2) \to +\infty$$

e f non può essere limitata superiormente $\square$

(e) SI. Siano $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = -x^2$.

Chiaramente $f(x) + g(x) = \operatorname{sen} x$.

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2 - \operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow f$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$

$g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow g$ è strettamente concava in $\mathbb{R}$

$\square$

3. Determinare se ciascuna delle seguenti funzioni è uniformemente continua in I.

(a) $f(x) = x\ln(x)$, $I = (0, +\infty)$,

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5 - x^4 + 1}{x}} - x^2$, $I = [1, +\infty)$,

(c) $f(x) = x\cos(1/x)$, $I = (0, +\infty)$,

(d) $f(x) = \sin(\sqrt{|x|}) + \sqrt{|\sin(x)|}$, $I = \mathbb{R}$,

(e) $f(x) = \sin(x\sin(x))$, $I = \mathbb{R}$,

(f) $f(x) = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} |x - n^2|$, $I = [0, +\infty)$.

Svolgimento:

(a) f non è u.c. in $I=(0,+\infty)$.

Se $x_n = e^n + \frac{1}{n}$, $y_n = e^n$ per $n \geq 1$ allora

$x_n, y_n \in I$, $|x_n - y_n| \to 0$ e

$$f(x_n) - f(y_n) = \left(e^n + \frac{1}{n}\right)\ln\left(e^n + \frac{1}{n}\right) - e^n \ln(e^n)$$

$$= e^n \ln\left(1 + \frac{1}{ne^n}\right) + \frac{1}{n}\ln\left(e^n + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \neq 0 .$$

□

(b) f è u.c. in $I = [1,+\infty)$.

Per dimostrarlo notiamo che f è continua in $[1,+\infty)$, e ha un asintoto per $x \to +\infty$.

$$f(x) = x^2\left(\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= x^2\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} + o(1) \overset{\text{asintoto}}{\Longrightarrow} y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{8} .$$

□

(c) f è u.c. in $I=(0,+\infty)$. Dato che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

f si prolunga per continuità in $[0,+\infty)$

Inoltre $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + o(1)$.

da cui f ha come asintoto la retta $y = x$.

Quindi f è u.c. in $[0,+\infty)$ e dunque

anche in $(0,+\infty)$.

□

(d) f è u.c. in $I = \mathbb{R}$.

Intanto osserviamo che $\sqrt{x}$ è Lip in $[1,+\infty)$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \underset{\substack{\uparrow \\ t\in(x,y)}}{\overset{TL}{=}} \left|\frac{1}{2\sqrt{t}}\right| |x-y| \le \max_{t\ge 1}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot |x-y| \le \frac{1}{2}|x-y|$$

e $\operatorname{sen}(x)$ è Lip in $\mathbb{R}$,

$$|\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y)| \underset{\substack{\uparrow \\ t\in(x,y)}}{\overset{TL}{=}} |\cos(t)|\,|x-y| \le 1\cdot|x-y|.$$

Sia $f_1(x) = \operatorname{sen}\sqrt{|x|}$. f_1 è continua in $[-1,1]$ e quindi è anche u.c. in $[-1,1]$.

Inoltre per $x,y \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$$|f_1(x)-f_1(y)| \le 1\cdot\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le \frac{1}{2}\big||x|-|y|\big| \le \frac{1}{2}|x-y|.$$

Quindi f_1 è Lip e dunque anche u.c. in $(-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$. Così f_1 è u.c. nell'unione $(-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,+\infty) = \mathbb{R}$ (nota che $(-\infty,-1] \cap [-1,1] \neq \emptyset$ e $[-1,1] \cap [1,+\infty) \neq \emptyset$).

Sia $f_2(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}$. f_2 è continua in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo π. Così f_2 è u.c. in $\mathbb{R}$ (vedi APPENDICE).

Infine anche $f = f_1 + f_2$ è u.c. in $\mathbb{R}$ come somma di funzioni u.c. in $\mathbb{R}$ (vedi APPENDICE).

$\square$

(e) FALSO. Siano $x_n = 2\pi n + \frac{1}{4n}$ e $y_n = 2\pi n$

Allora $x_n - y_n = \frac{1}{4n} \to 0$ e per $n \to +\infty$

$$f(x_n) - f(y_n) = \operatorname{sen}\left(x_n \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{4n}\right)\right) - 0$$

$$= \operatorname{sen}\left(\left(2\pi n + \tfrac{1}{4n}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} + o(1)\right) \to 1 \neq 0$$

$\square$

(f) VERO. Si noti che se $x, y \in [0, +\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n^2| = |x - y + y - n^2| \leq |x-y| + |y - n^2|$$

da cui, passando al minimo per $n \in \mathbb{N}$,

$$\min_{n\in\mathbb{N}} |x - n^2| \leq |x-y| + \min_{n\in\mathbb{N}} |y - n^2|$$

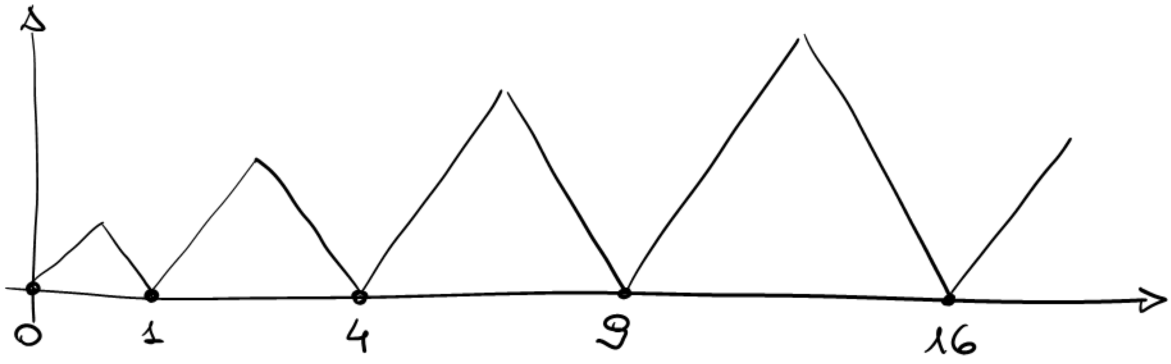
ossia

$$f(x) - f(y) \leq |x-y|$$

e scambiando x con y si ottiene

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|.$$

Così f è Lip e dunque anche unif. continua su $[0,+\infty)$. Il grafico di f è una spezzata con pendenze $+1$ e -1.



$\square$

APPENDICE

1) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e f e g sono u.c. in $A \subseteq \mathbb{R}$ allora $\alpha f + \beta g$ sono u.c. in A.

Per ipotesi, per $\varepsilon > 0$

$$\exists\, \delta_f > 0 \ :\ x, y \in A,\ |x-y| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\exists\, \delta_g > 0 \ :\ x, y \in A,\ |x-y| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

allora se $\delta := \min(\delta_f, \delta_g) > 0$, $x, y \in A$ e $|x-y| < \delta$

$$|(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(y) + \beta g(y))|$$

$$\leq |\alpha|\,|f(x) - f(y)| + |\beta|\,|g(x) - g(y)| \leq (|\alpha| + |\beta|) \cdot \varepsilon.$$

□

2) Se f è continua e periodica in $\mathbb{R}$ allora f è u.c. in $\mathbb{R}$.

Sia T il periodo. Per Heine-Cantor, f è u.c. in $[0, 2T]$ quindi per $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che se $x, y \in [0, 2T]$ e $|x-y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$: $|x-y| < \min(\delta, T)$ allora $\exists\, n$ intero tale che $x, y \in [nT, (n+2)T]$ ossia $x - nT$ e $y - nT \in [0, 2T]$. Allora

$$|f(x) - f(y)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{periodicità}}}{=} |f(x - nT) - f(y - nT)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{u.c. in } [0,2T]}}{<} \varepsilon$$

e quindi f è u.c. in $\mathbb{R}$.

□

4. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$ allora la funzione $|f|$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione invertibile e uniformemente continua in $\mathbb{R}$ allora la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(c) Se f è uniformemente continua e positiva in $[1, +\infty)$ allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = 1$.

(d) Se f è continua in $[0, +\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ allora la funzione $f(x)\sin(x)$ non è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

(e) Se f è derivabile, convessa e limitata superiormente in $[0, +\infty)$ allora f è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

Svolgimento:

(a) VERO. Basta osservare che per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \leq |f(x) - f(y)|.$$

(b) FALSO. Ad esempio sia $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

f è biunivoca da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con inversa $f^{-1}(x) = x^3$.

f è u.c. in $\mathbb{R}$ mentre f^{-1} non è u.c. in $\mathbb{R}$.

(c) FALSO. Ad esempio sia $f(x) = \dfrac{2+\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

allora f è unif. continua in $[1, +\infty)$ perché è continua e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ma $x_n = \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ e

$$\frac{f\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)}{f(x_n)} = \frac{2 + \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n} + 2\right)}{2\pi n + \frac{1}{2\pi n}} \cdot \frac{2\pi n}{2 + \operatorname{sen}(2\pi n)}$$

$$= \frac{2 + \operatorname{sen}\left(2 + \frac{1}{2\pi n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{(2\pi n)^2}\right) \cdot 2} \to 1 + \frac{\operatorname{sen}(2)}{2} \neq 1.$$

$\square$

(d) VERO. Dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ esiste una successione strettamente crescente di interi positivi $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tale che

$$x \geq 2\pi a_n \Rightarrow f(x)\geq n.$$

Siano $x_n = 2\pi a_n + \frac{1}{n}$ e $y_n = 2\pi a_n$ per $n\geq 1$.

Allora $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ e

$$\left|f(x_n)\sin(x_n) - f(y_n)\sin(y_n)\right| = \left|f(x_n)\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right|$$

$$= f(x_n)\cdot \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) \geq n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) \geq \sin(1) =: \varepsilon > 0.$$

$\square$

(e) VERO. Dato che f è limitata superiormente

$$\exists M\in\mathbb{R}:\ \forall y\geq 0,\ f(y)\leq M.$$

Inoltre per la convessità per $x,y\geq 0$

$$f'(x)(y-x)+f(x)\leq f(y)\leq M$$

e se $f'(x)>0$, per $y\to+\infty$ si avrebbe l'assurdo

$$+\infty \leftarrow f'(x)(y-x)+f(x)\leq M$$

Quindi $f'(x)\leq 0$. Inoltre ancora per la convessità f' è crescente su $[0,+\infty)$ e dunque $f'(0)\leq f'(x)$.

Così $\forall x\geq 0$ $|f'(x)|\leq|f'(0)|$ ossia la derivata prima di f è limitata e ne segue che f è unif. continua su $[0,+\infty)$.

$\square$