Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

21 Marzo 2018

1. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2x}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x\ln^2(x/2)-\sin((x^2-4)^2)}{((x-1)^2-1)^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-2(2-\sqrt[n]{2})^n)$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3(1-\cos(\sin(x)))}{\arctan(x)-\sin(\sin(x))}$.

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Se la funzione $\ln(f)$ è convessa in $\mathbb{R}$ allora anche la funzione f è convessa in $\mathbb{R}$?

(b) Esiste un polinomio di secondo grado $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tale che la funzione $\ln(P)$ è convessa in $\mathbb{R}$?

(c) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile e strettamente convessa in $\mathbb{R}$. Allora per ogni punto $x_0\in\mathbb{R}$, $(x_0, f(x_0))$ è l'unico punto di intersezione tra il grafico di f e la retta tangente in x_0?

(d) Esiste una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che sia limitata e strettamente convessa in $\mathbb{R}$?

(e) Esistono due funzioni f e g tali che f è strettamente convessa in $\mathbb{R}$, g è strettamente concava in $\mathbb{R}$ e $\sin(x)=f(x)+g(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$?

3. Determinare se ciascuna delle seguenti funzioni è uniformemente continua in I.

(a) $f(x)=x\ln(x)$, $I=(0,+\infty)$, (b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^5-x^4+1}{x}}-x^2$, $I=[1,+\infty)$,

(c) $f(x)=x\cos(1/x)$, $I=(0,+\infty)$, (d) $f(x)=\sin(\sqrt{|x|})+\sqrt{|\sin(x)|}$, $I=\mathbb{R}$,

(e) $f(x)=\sin(x\sin(x))$, $I=\mathbb{R}$, (f) $f(x)=\min_{n\in\mathbb{N}}|x-n^2|$, $I=[0,+\infty)$.

4. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$ allora la funzione $|f|$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(b) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione invertibile e uniformemente continua in $\mathbb{R}$ allora la funzione inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(c) Se f è uniformemente continua e positiva in $[1,+\infty)$ allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=1$.

(d) Se f è continua in $[0,+\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ allora la funzione $f(x)\sin(x)$ non è uniformemente continua in $[0,+\infty)$.

(e) Se f è derivabile, convessa e limitata superiormente in $[0,+\infty)$ allora f è uniformemente continua in $[0,+\infty)$.