1. Studiare la convessità/concavità delle seguenti funzioni e tracciarne i grafici.

(a) $f(x) = |x+2|e^{-1/x}$, (b) $f(x) = |x+1| + \arctan(1-x)$,

(c) $f(x) = |x| + \dfrac{1}{1+\cos(x)}$, (d) $f(x) = x\ln(6x - x|x|\lfloor x \rfloor)$.

Svolgimento:

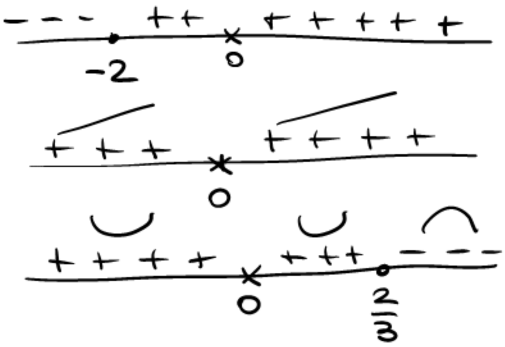
(a) Sia $g(x) = (x+2)\,e^{-1/x}$.

Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$g(x) = e^{-1/x}(x+2)$$

$$g'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}(x^2+x+2)$$

$$g''(x) = -\frac{e^{-1/x}}{x^4}(3x-2)$$

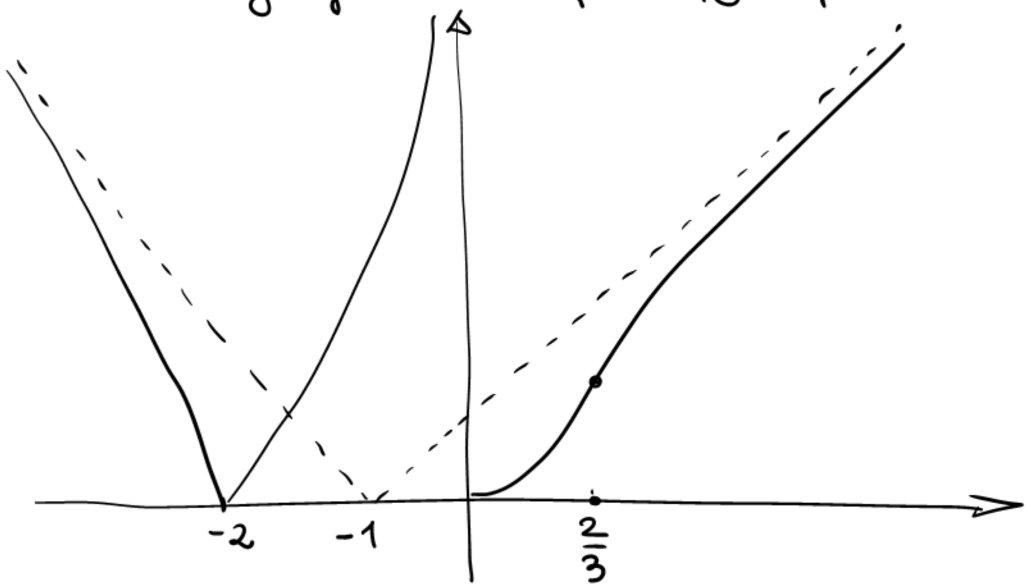


Inoltre per $x \to +\infty$

$$g(x) = (x+2)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= x+2-1+o(1) = x+1+o(1).$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty.$$

Quindi il grafico di $f(x) = |g(x)|$ è



f è convessa in $[-2,0)$ e $(0,\frac{2}{3}]$.
f è concava in $(-\infty,-2]$ e $[\frac{2}{3},+\infty)$
$\frac{2}{3}$ è un punto di flesso. □

(b) Abbiamo che

$$f(x) = |x+1| - \operatorname{arctg}(x-1) = \begin{cases} g_1(x-1) & \text{per } x \geq -1 \\ g_2(x-1) & \text{per } x \leq -1 \end{cases}$$

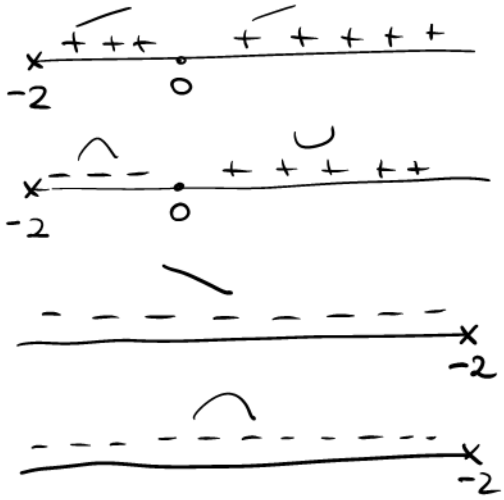
dove $g_1(x) = x+2-\operatorname{arctg} x$ e $g_2(x) = -x-2-\operatorname{arctg} x$.

$$g_1'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$g_1''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$g_2'(x) = -\frac{2+x^2}{1+x^2}$$

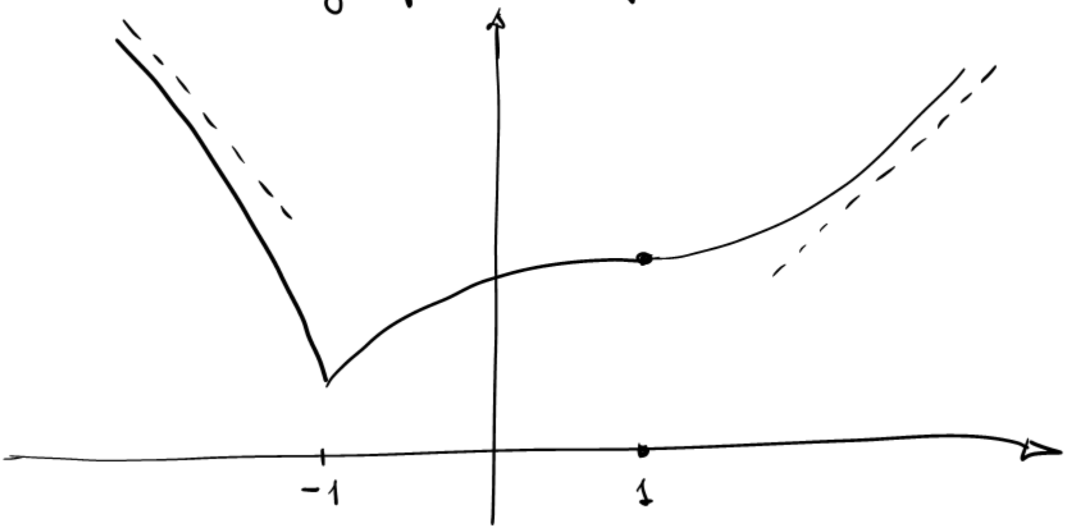
$$g_2''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$



Per $x \to +\infty$, $g_1(x) = x+2-\frac{\pi}{2}+o(1)$

Per $x \to -\infty$, $g_2(x) = -x-2+\frac{\pi}{2}+o(1)$

Quindi il grafico di f è



f è convessa in $[1,+\infty)$

f è concava in $(-\infty,-1]$ e $[-1,1]$

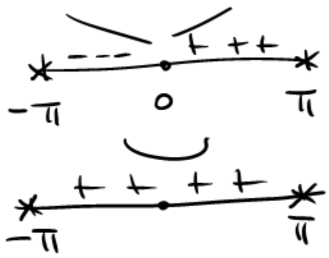
1 è un punto di flesso

$\square$

(c) Sia $g(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$. g è una funzione di periodo 2π definita in $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

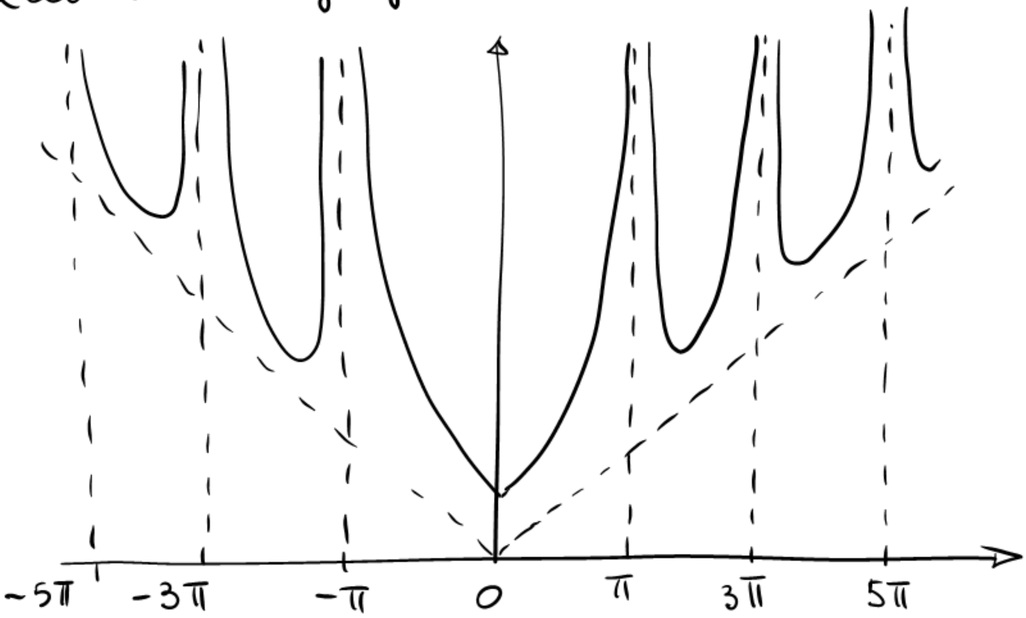
$$g'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2-\cos x}{(1+\cos x)^2}$$



La funzione $f(x) = |x| + g(x)$ ha lo stesso dominio, è pari, non è derivabile in 0 e $f''(x) = g''(x)$ $\forall x$ nel dominio e $x \neq 0$.

Quindi il grafico di f è



f è convessa in tutti gli intervalli $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Non ci sono punti di flesso. □

(d) Notiamo che $h(x)=|x|\lfloor x\rfloor$ è una funzione crescente tale che $\lim_{x\to 3^-} h(x) = 6 < 9 = h(3)$. Così

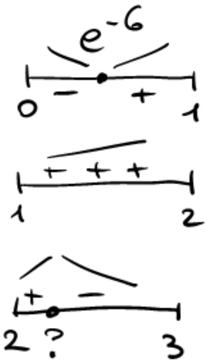
$$0 < 6x - x|x|\lfloor x\rfloor = x\left(6-|x|\lfloor x\rfloor\right)$$

se e solo se $x\in(0,3)$. Quindi

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(6x) & \text{se } x\in(0,1) \\ x\ln(6x-x^2) & \text{se } x\in[1,2) \\ x\ln(6x-2x^2) & \text{se } x\in[2,3) \end{cases}$$

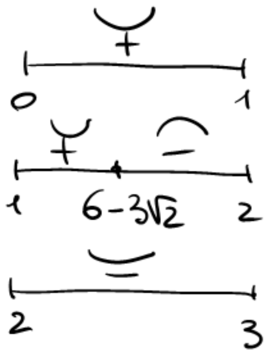
Allora

$$f'(x)=\begin{cases} \ln(6x)+1 & \text{se } x\in(0,1) \\ \ln(6x-x^2)+\dfrac{2(3-x)}{6-x} & \text{se } x\in(1,2) \\ \ln(6x-2x^2)+\dfrac{3-2x}{3-x} & \text{se } x\in(2,3) \end{cases}$$

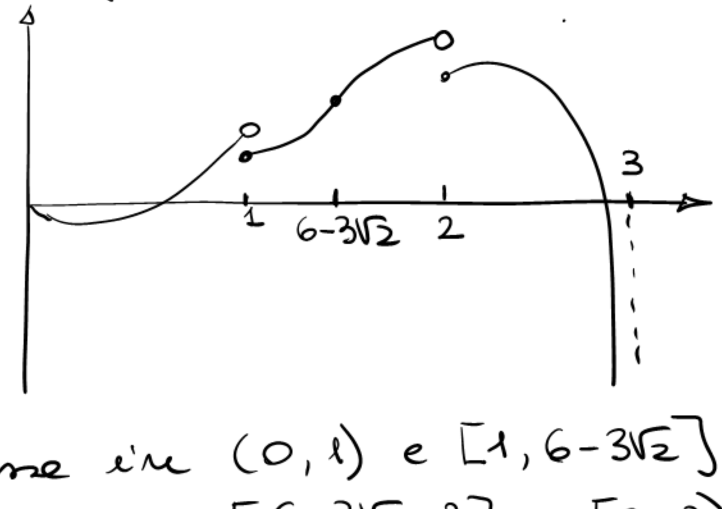


e

$$f''(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x\in(0,1) \\ \dfrac{2(x^2-12x+18)}{x(6-x)^2} & \text{se } x\in(1,2) \\ \dfrac{2x^2-12x+9}{x(3-x)^2} & \text{se } x\in(2,3) \end{cases}$$



Il grafico di f è



f è convessa in $(0,1)$ e $[1, 6-3\sqrt{2}]$.

f è concava in $[6-3\sqrt{2}, 2]$ e $[2,3)$.

$6-3\sqrt{2}$ è un punto di flesso. $\square$

2. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{2x}-e^2\sqrt{2-x}}{\sin(\pi(2x-1))}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\pi}{2\arctan(3(\pi-x))}\right)^{\pi x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-e^{-2x}}{1-x-e^{-x}}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\cos(x))^{1/x}}{x^2}-\frac{2}{2x^2+x^3-2x^4}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)^{1/x}-\ln(1+ex)}{x\sin(x/2)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+5}}-x^2\tan\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\right)$.

Svolgimento:

(a) Sia $t = x-1 \to 0^+$ allora

$$e^{2x}-e^2\sqrt{2-x} = e^2\left(e^{2t}-\sqrt{1-t}\right) = e^2\left(\cancel{1}+2t-\cancel{1}+\frac{t}{2}+o(t)\right)$$
$$= e^2\cdot\left(\frac{5}{2}t+o(t)\right)$$

$$\operatorname{sen}(\pi(2x-1)) = \operatorname{sen}(2\pi t+\pi) = -\operatorname{sen}(2\pi t) = -2\pi t+o(t).$$

Quindi
$$\lim_{x\to 1^+}(\dots) = \lim_{t\to 0^-}\frac{e^2\left(\frac{5}{2}t+o(t)\right)}{-2\pi t+o(t)} = -\frac{5e^2}{4\pi}$$

$\square$

(b) Notiamo che per $t\to+\infty$
$$\operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)$$

Infatti
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t}{1/t} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{-1/t^2} = 1.$$

Sia $t = 3(\pi-x)\to+\infty$ allora

$$\left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg}(3(\pi-x))}\right)^{\pi x} = \left(\frac{\operatorname{arctg}(t)}{\pi/2}\right)^{\pi\left(\frac{t}{3}-\pi\right)}$$
$$= \exp\left(\pi\left(\frac{t}{3}-\pi\right)\ln\left(1-\frac{2}{\pi t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\pi\left(\frac{t}{3}-\pi\right)\cdot\left(-\frac{2}{\pi t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{2}{3}+o(1)\right) \to e^{-\frac{2}{3}}.$$

$\square$

(c) $$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}(-4x)-\frac{1}{8}(-4x)^2+o(x^2)$$
$$= 1-2x-2x^2+o(x^2)$$

$$e^{-2x} = 1-2x+\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)$$
$$= 1-2x+2x^2+o(x^2).$$

Quindi il numeratore diventa

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}-e^{-2x} = -4x^2+o(x^2).$$

Il denominatore invece è

$$1-x-e^{-x} = 1-x-\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$= -\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Così

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-e^{-2x}}{1-x-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 8.$$

$\square$

(d) $$\frac{2}{2x^2+x^3-2x^4} = \frac{1}{x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{2}-x^2\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1-\left(\frac{x}{2}-x^2\right)+\left(\frac{x}{2}-x^2\right)^2+o(x^2)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{2}+x^2+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)$$

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{x}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{x}{2}+o(x^2)\right)$$
$$= 1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)$$
$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$$

Quindi

$$\frac{(\cos(x))^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{2}{2x^2+x^3-2x^4} = \frac{1}{x^2}\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{8}-\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{5x^2}{4}\right)+o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{5}{4} + o(1) \xrightarrow{x\to 0} -\frac{9}{8}. \qquad \square$$

(e) $$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right) = e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right),$$

$$\ln(1+ex) = ex - \frac{(ex)^2}{2} + o(x^2),$$

$$x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = x\left(\frac{x}{2}+o(x)\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Così per $x\to 0$

$$\frac{x(1+x)^{\frac{1}{x}} - \ln(1+ex)}{x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cancel{ex} - \frac{ex^2}{2} - \cancel{ex} + \frac{e^2x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \to e^2-e \qquad \square$$

(f) Sia $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ e il limite diventa

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}(1+5t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t^2}\cdot \operatorname{tg}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\right).$$

Ora $(1+5t)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{5}{2}t+o(t)$ e

$$\operatorname{tg}\left(t+\frac{t^2}{2}\right) = t+\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\cancel{\frac{1}{t}} - \frac{5}{2} + o(1) - \left(\cancel{\frac{1}{t}} + \frac{1}{2} + o(1)\right)\right) = -3. \qquad \square$$

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile due volte in $(0,1)$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

(a) Esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = -f''(x_0)$.

(c) La funzione $x \to \exp(-f(x))$ è concava in $[0,1]$.

(d) La funzione f è derivabile in 0.

(e) Se $x \in (0,1)$ allora $f(x) < \min(0, xf'(x))$.

(f) Se $r \in (0,1]$ allora esistono $0 \le x < y \le 1$ tali che $y - x = r$ e $f(x) = f(y)$.

Svolgimento:

(a) VERO. Sia $g(x) = e^{-x} f(x)$ allora $g(0) = g(1) = 0$ e per il teo. di Lagrange $\exists x_0 \in (0,1) : g'(x_0) = 0$

$$g'(x) = e^{-x}(-f(x) + f'(x)) \Rightarrow f(x_0) = f'(x_0)$$

$\square$

(b) FALSO. Controesempio $f(x) = x^2 - x$:

$$\forall x \in (0,1) \qquad f''(x) = 2 > x^2 - x = f(x).$$

$\square$

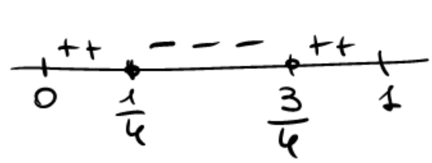
(c) FALSO. Controesempio $f(x) = 8(x^2 - x)$

$$\exp(-f(x)) \xrightarrow{D} \exp(-f(x)) \cdot (-f'(x))$$

$$\xrightarrow{D} \underbrace{\exp(-f(x))}_{>0} \cdot ((f'(x))^2 - f''(x)) \overset{?}{\le} 0 \quad \forall x \in (0,1).$$

Nel nostro caso:

$$(f'(x))^2 - f''(x) = 16(4x-1)(4x-3)$$



$\square$

(d) FALSO. Controesempio: $f(x) = -\sqrt{x(1-x)}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{\frac{1-x}{x}} = -\infty$$

$\square$

Quindi f non è derivabile in 0.

(e) VERO. Dobbiamo dimostrare che $\forall x \in (0,1)$

$$(1) \quad f(x) < 0 \qquad e \qquad (2) \quad f(x) < x f'(x)$$

Dato che $f''(x) < 0$, f è strettamente convessa in $[0,1]$

$$f(x) = f((1-x)\cdot 0 + x \cdot 1) < (1-x) f(0) + x f(1) = 0$$

e quindi la (1) vale.

Per Taylor con il resto di Lagrange $\exists\, t \in (0,x)$:

$$0 = f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \underbrace{\frac{f''(t)}{2}(0-x)^2}_{>0}$$

da cui $f(x) - x f'(x) < 0$ ossia la (2).

(f) VERO. Per $r = 1$ vale: $f(0) = f(1)$. Per $0 < r < 1$ sia $g(x) = f(x+r) - f(x)$ definita e continua in $[0, 1-r]$. Allora per (e)

$$g(0) = f(r) - f(0) = f(r) < 0$$

$$g(1-r) = f(1) - f(1-r) = -f(1-r) < 0$$

perché per (e) $f(x) < 0$ in $(0,1)$.

Quindi per il teorema dei valori intermedi

$\exists\, x \in (0, 1-r)$: $g(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$

dove $y = x + r \in (r, 1)$. $\square$

4. Sia $f \in C^2([-1,1])$ con un punto stazionario in $x = 0$ e tale che $f(0) = 0$.
(a) Dimostrare che esiste $M \geq 0$ tale che $f(x) \leq Mx^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.

(b) Dimostrare che esiste $R \in (0,1)$ tale che la circonferenza con centro nel punto di coordinate $(0, R)$ e raggio R interseca il grafico di f solo nell'origine.

Svolgimento:

(a) Per la formula di Taylor con il resto di Lagrange, $\forall x \in [-1,1]$ $\exists t \in [-1,1]$ tale che

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(t)}{2}x^2 = \frac{f''(t)x^2}{2} \leq Mx^2$$

dove $M = \frac{1}{2}\max_{t\in[-1,1]} |f''(t)|$ (il max esiste perché $f'' \in C([-1,1])$. $\square$

(b) L'equazione della circonferenza è

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2.$$

Sia $g(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ (semicirconferenza inferiore).
Dato che $f(0) = g(0)$ e $f(x) \leq Mx^2$ per $x \in [-1,1]$ basta dimostrare che per un opportuno $R \in (0,1)$

$$Mx^2 < g(x) \quad \forall x \in [-R,R]\setminus\{0\}.$$

Abbiamo che per $0 < |x| \leq R < 1$

$$R - \sqrt{R^2-x^2} = \frac{\cancel{R^2} - (\cancel{R^2} - x^2)}{R + \sqrt{R^2-x^2}} > \frac{x^2}{2R} \overset{?}{\geq} Mx^2$$

e dunque basta prendere $R = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } M \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2M} & \text{se } M > \frac{1}{2} \end{cases}$. $\square$