Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 30 Agosto 2018

Nome e cognome: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

1. Per $n \geq 0$, sia $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Dimostrare che $0 < e - a_n < \dfrac{2}{n!}$, per ogni $n \geq 0$.

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n\ln(a_n)}{\ln(n+1)-\ln(n)} - \left(n+\frac{1}{4}\right)^2 \right)$.

Svolgimento:

(a) Per l'espansione di Taylor di e^x in 0 con il resto di Lagrange, $\exists\, t \in (0,1)$ tale che $e - a_n = \dfrac{e^t}{(n+1)!} > 0$.

Per $n=0$, $e - a_0 = e - 1 < \dfrac{2}{1!}$ perché $e<3$.

Per $n \geqslant 1$ si ha che $e < 3 < 2(n+1)$ e quindi

$$e - a_n = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{2}{n!}. \qquad \square$$

(b) Per (a) si ha che $0 < \dfrac{e-a_n}{1/n^2} < \dfrac{2n^2}{n!} \to 0$

Quindi $a_n = e + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Così

$$\frac{n\ln(a_n)}{\ln(n+1)-\ln n} = \frac{n\ln\left(e\left(1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{n\left(1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \left(n^2+o(1)\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(n^2+o(1)\right)\left(1+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}\right)+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= n^2+\frac{n}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+o(1).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ldots = \lim_{n\to+\infty}\left(\cancel{n^2}+\cancel{\frac{n}{2}}-\frac{1}{12}+o(1)-\cancel{n^2}-\cancel{\frac{n}{2}}-\frac{1}{16}\right) = -\frac{7}{48}. \qquad \square$$

2. Sia f una funzione derivabile in $[0, +\infty)$ che sia positiva e decrescente in $[a, +\infty)$ per qualche $a \geq 0$ e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(a) Dimostrare che l'integrale improprio $I(f) := \int_0^{+\infty} f(x) \sin(x)\, dx$ è convergente.

(b) Determinare una funzione f che soddisfa le ipotesi e tale che $I(f) = 0$.

Svolgimento:

(a) Integrando per parti si ha che

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, d(-\cos x)$$

$$= \underbrace{\Big[-f(x)\cos x\Big]_a^{+\infty}}_{= f(a)\cos(a)} + \underbrace{\int_a^{+\infty} f'(x)\cos x}_{\text{ass. convergente}}$$

Infatti

$$\int_a^{+\infty} |f'(x)\cos x|\, dx \leq \int_a^{+\infty} |f'(x)|\, dx = -\int_a^{+\infty} f'(x)\, dx = \Big[-f(x)\Big]_a^{+\infty}$$

$$= f(a) - \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a) < +\infty.$$

$\square$

(b) Osserviamo che per $\lambda > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \operatorname{sen} x \, dx = \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}(\cos x - \lambda \operatorname{sen} x)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda^2+1}.$$

Consideriamo una funzione della forma

$$f(x) = e^{-x} - c\, e^{-2x}$$

con $c > 0$. Allora f soddisfa le ipotesi e

$$\int_0^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx - c \int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \frac{1}{1^2+1} - \frac{c}{2^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{c}{5} = 0$$

per $c = \frac{5}{2}$.

$\square$

3. Per $n \geq 1$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{|x+4|^n + |x|^n}.$$

(a) Per quali $r > 0$ la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[-r, r]$?

(b) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(x)\,dx$.

Svolgimento:

(a) Abbiamo che per $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\left|1+\frac{4}{x}\right|^n + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1 & \text{se } x<-2 \ \left(\text{se } \left|1+\frac{4}{x}\right|<1\right) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=-2 \ \left(\text{se } \left|1+\frac{4}{x}\right|=1\right) \\ 0 & \text{se } x>-2 \ \left(\text{se } \left|1+\frac{4}{x}\right|>1\right) \end{cases}$$

(estesa per continuità in 0)

Dato che f_n è continua e il limite uniforme f in $[-r,r]$ è ancora continuo, dal limite puntuale deduciamo che necessariamente $f=0$ e $r<2$.

Verifichiamo che effettivamente $f_n \to 0$ in $[-r,r]$ per $r<2$: per $x \in [-r,r]$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{|x|^n}{|x+4|^n} \leq \frac{r^n}{(4-r)^n} = \Big(\underbrace{\frac{r}{4-r}}_{<1}\Big)^n \to 0. \quad \square$$

(b) Notiamo che $f_n(x)$ è crescente in $[0,+\infty)$ e

$$\int_0^n f_n(x)\,dx \geq \int_{\frac{n}{2}}^n f_n(x)\,dx \geq f\left(\frac{n}{2}\right)\int_{\frac{n}{2}}^n 1\,dx$$

$$= f\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{8}{n}\right)^n}_{\to e^8}+1} \to +\infty \quad \square$$

4. Si consideri per $x > 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3y''(x) + 3x^2y'(x) + xy(x) = 6\ln(x) \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in $(0, +\infty)$ (suggerimento: porre $u(t) = y(e^t)$).

(b) Dimostrare o confutare che $y(x) < 2$ per ogni $x > 0$.

Svolgimento: Posto $u(t) = y(e^t)$ (e $x = e^t$) si ha

$$\begin{cases} u'(t) = y'(e^t)\, e^t \\ u''(t) = y''(e^t)\, e^{2t} + y'(e^t)\, e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(e^t) = u'(t) e^{-t} \\ y''(e^t) = (u''(t) - u'(t)) e^{-2t} \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene

$$u''(t) - u'(t) + 3u'(t) + u(t) = 6t\,e^{-t}$$

che è lineare a coeff. costanti con pol. caratteristico $z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$. Quindi

$$u(t) = \underbrace{(C_1 + C_2 t)\, e^{-t}}_{\text{sol. omog.}} + \underbrace{t^2(At + B)\, e^{-t}}_{\text{sol. particolare}}$$

Dopo qualche calcolo si ottiene che $A = 1$ e $B = 0$ e imponendo le condizioni iniziali $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$ si ha che $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. Così la soluzione è $u(t) = (t + t^3)e^{-t}$ per $t \in \mathbb{R}$ e

$$y(x) = \frac{\ln x + \ln^3 x}{x} \quad \text{per } x > 0. \qquad \square$$

(b) La disuguaglianza data è VERA.
Abbiamo che $y(x) < 2$ per ogni $x > 0$ se e solo se $u(t) < 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Notiamo che per $n \geq 1$ la funzione $t \to t^n e^{-t}$ è superiormente limitata con punto di massimo $t = n$. Allora

$$u(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} (te^{-t}) + \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^3 e^{-t}) = \frac{1}{e} + \frac{27}{e^3} < 2. \qquad \square$$