Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 13 Luglio 2018

Nome e cognome:

1. Sia $f \in C^2([0, +\infty))$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se per ogni $x \geq 0$, $f'(x) < -1 < f''(x)$ allora f è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

(b) Se per ogni $x \geq 0$, $f'(x) < 0 < f''(x)$ allora f è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

Svolgimento:

(a) FALSO Ad esempio $f(x) = -\frac{x^2}{4} - 2x$ non è unif. continua in $[0,+\infty)$ e per $x \geq 0$

$$-\frac{x}{2} - 2 = f'(x) < -1 < f''(x) = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

(b) VERO. Se $f''(x) > 0$ per $x \geq 0$ allora $f'(x)$ è crescente in $[0,+\infty)$ e quindi per $x \geq 0$

$$f(0) \leq f'(x).$$

Inoltre per ipotesi $f'(x) < 0$ per $x \geq 0$.
Se ne conclude che f' è limitata in $[0,+\infty)$, da cui f è Lipschitziana e dunque anche unif. continua in $[0,+\infty)$. $\square$

Oss. Un esempio di funzione che soddisfa le ipotesi è $f(x) = \frac{1}{x+1}$: per $x \geq 0$

$$-\frac{1}{(x+1)^2} = f'(x) < 0 < f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

2. Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n a_n$ è convergente allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ è convergente.

(b) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(2+|a_n|)}$ è convergente.

Svolgimento:

(a) VERO. Dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n a_n$ converge si ha che $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n a_n = 0$ e dunque $\exists N\geq 1$ tale che $|(-2)^n a_n|\leq 1$ ossia $|a_n|\leq \frac{1}{2^n}$ per $n\geq N$.

Così $|n a_n| \leq \frac{n}{2^n}$ per $n\geq N$ e per confronto dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ converge (ad. es. per il criterio del rapporto), se ne deduce che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ converge assolutamente e quindi converge anche semplicemente. $\square$

(b) FALSO. Se $a_n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n & \text{se } n \text{ è pari}\end{cases} \to +\infty$

allora

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(2+|a_n|)} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{n}\ln(2+n^n)} \sim -\dfrac{1}{n^{3/2}\ln n}, & n \text{ dispari} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(2+n)} \sim \dfrac{1}{n^{1/2}\ln n}, & n \text{ pari}\end{cases}$$

Così, separando i segni, la serie è la somma di una serie convergente (quella sui dispari perché $\frac{3}{2}>1$) e una serie divergente (quella sui pari perché $\frac{1}{2}<1$). Quindi la serie diverge. $\square$

3. Per $x \geq 0$ e per ogni intero $n \geq 1$ sia

$$f_n(x) = \frac{x}{(nx^2+n)\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)}.$$

(a) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$?

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Svolgimento:

(a) Sia $x \geq 0$. Dato che $\ln(1+t) = t + o(t)$ per $t = \frac{x+1}{n} \to 0$

$$f_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)\, n \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)} \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}.$$

Sì, f_n converge uniformemente a f in $[0,+\infty)$.

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{n}\sup_{x\geq 0}\left[\underbrace{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}_{\leq\frac{1}{2}}\cdot\left|\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)} - \frac{1}{\frac{x+1}{n}}\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2n}\sup_{t\geq\frac{1}{n}}|h(t)| \leq \frac{1}{2n}\sup_{t>0}|h(t)| \to 0$$

dove $h(t) := \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}$ è una funzione limitata perché è continua su $(0,+\infty)$ con limiti finiti agli estremi:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{\ln(1+t)\cdot t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{t-\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{(t+o(t))\cdot t} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

(b) Dato che $f_n \xrightarrow{u} f$ su $[0,1]$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4} - \ln(2)\right] = \frac{\pi - 2\ln 2}{8}. \qquad \square$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 16xe^{-2x} \\ y(0) = A, \quad y'(0) = B\,. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in funzione di $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) Se esistono, determinare tutti i valori di A e B tali che $\displaystyle\int_1^{\infty} y(\ln(t))\,dt = 0$.

Svolgimento:

(a) Il polinomio caratteristico è

$$z^2+z-6 = (z+3)(z-2) \Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Una soluzione particolare è della forma

$$y_*(x) = (ax+b)e^{-2x}$$

e sostituendo si ottiene che $a=-4$ e $b=3$.

Quindi imponendo alla soluzione generale

$y(x) = y_0(x) + y_*(x)$ le condizioni iniziali

$$\begin{cases} A = y(0) = C_1 + C_2 + 3 \\ B = y'(0) = -3C_1 + 2C_2 - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{2A-B-16}{5} \\ C_2 = \dfrac{3A+B+1}{5} \end{cases}. \qquad \square$$

(b) Abbiamo che

$$y(\ln(t)) = \frac{C_1}{t^3} + C_2 t^2 - \frac{4\ln t}{t^2} + \frac{3}{t^2}$$

e affinché l'integrale in $[1,+\infty)$ sia convergente

è necessario che $C_2 = 0$. In tal caso

$$\int_1^{+\infty} y(\ln(t))\,dt = \left[\frac{C_1 t^{-2}}{-2} + \frac{4(\ln t + 1)}{t} + \frac{3t^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} = \frac{C_1}{2} - 1 = 0.$$

quindi $C_1 = 2$. Infine

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 = 2A-B \\ -1 = 3A+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -1-3A = -16. \end{cases}$$

$\square$