Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

13 Luglio 2018

1. Sia $f \in C^2([0, +\infty))$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se per ogni $x \geq 0$, $f'(x) < -1 < f''(x)$ allora f è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

(b) Se per ogni $x \geq 0$, $f'(x) < 0 < f''(x)$ allora f è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

2. Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n a_n$ è convergente allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ è convergente.

(b) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(2+|a_n|)}$ è convergente.

3. Per $x \geq 0$ e per ogni intero $n \geq 1$ sia

$$f_n(x) = \frac{x}{(nx^2+n)\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)}.$$

(a) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0, +\infty)$?

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 16xe^{-2x} \\ y(0) = A, \quad y'(0) = B\,. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in funzione di $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) Se esistono, determinare tutti i valori di A e B tali che $\displaystyle\int_1^{\infty} y(\ln(t))\,dt = 0$.