Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 22 Giugno 2018

Nome e cognome: $\sqcup\!\sqcup$

1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^a}\,dx.$$

(a) Per quali valori di $a>0$, l'integrale è convergente?

(b) Quanto vale l'integrale per $a=3/2$?

Svolgimento:

(a) La funzione integranda f è positiva in $(0,+\infty)$.

Per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{2x+2-2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{x^a \cdot 2^a} \sim \frac{3/2\, x}{x^a \cdot 2^a} \sim \frac{c}{x^{a-1}}$$

e dunque l'integrale converge in $(0,r)$ se e solo se $a-1<1$ ovvero per $a<2$.

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{2x}{(x^2)^a} = \frac{2}{x^{2a-1}}$$

e l'integrale converge in $(r,+\infty)$ se e solo se $2a-1>1$ ovvero per $a>1$.

Quindi l'integrale converge per $a \in (1,2)$. $\square$

(b) Per $a=\frac{3}{2}$ spezziamo l'integrale in due parti

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x)^{3/2}}\,dx = \int (x^2+2x)^{-3/2}\,d(x^2+2x) = -2(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}+c$$

e $\quad t=\sqrt{x} \quad 2t\,dt = dx$

$$-\sqrt{2}\int \frac{dx}{x^{3/2}(x+2)} \overset{\downarrow}{=} -\sqrt{2}\int \frac{2t\,dt}{t^3(t^2+2)} = \sqrt{2}\int\left(\frac{1}{t^2+2}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{t} + c = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{t} + c$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{x}} + c\,.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{\left(x(x+2)\right)^{3/2}}\, dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x(x+2)}} + \sqrt{\frac{2}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

perché

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{\sqrt{x(x+2)}} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{2}{x}}\left(-\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{2}\,\frac{-x/4}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

$\square$

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $f(x) = x^3 + \cos\left(x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{3(\sin(x))^2}{2} - x^2$. Allora $x = 0$ è un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso?

(b) Sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di polinomi di secondo grado tale che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ allora la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in ogni insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) In un intorno di $x=0$

$$f(x) = x^3 + 1 - \frac{1}{2}\left(x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^4 + o(x^4)$$

$$+ \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2$$

$$= x^3 + 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \cancel{x^4} + 2x^3 - \cancel{x^4} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$+ \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - x^2$$

$$= 1 + \left(-\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{3}{2}} - \cancel{1}\right)x^2 + (\cancel{1} - \cancel{1})x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^4).$$

Così $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^4} = -\frac{11}{24} < 0$ e quindi

esiste $r > 0$ tale che $f(x) \leq f(0) = 1 \quad \forall x \in (-r, r)$.

onde $x=0$ è un punto di massimo relativo.

$\square$

(b) Dimostriamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato allora $f_n \xrightarrow{u} 0$ in A. Abbiamo che

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$$

con $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n$ successioni in $\mathbb{R}$.
Per la convergenza puntuale $f_n(0) = c_n \to 0$
Inoltre

$$f_n(1) = a_n + b_n + c_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \to 0$$

$$f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} \to 0$$

così

$$a_n = 2(a_n + b_n) - 4\left(\frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2}\right) \to 0$$

$$b_n = (a_n + b_n) - a_n \to 0.$$

Infine, dato che $A \subseteq [-R, R]$ per qualche $R > 0$,

$$\sup_{x \in A} |f_n(x)| \le \underbrace{|a_n|}_{\to 0} R^2 + \underbrace{|b_n|}_{\to 0} R + \underbrace{|c_n|}_{\to 0} \to 0.$$

$\square$

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Quanto vale la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\,2^n}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$?

(b) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{nx}+x^2}{(n+2^{nx^2})\ln(n!)}$ è convergente?

Svolgimento:

(a) Osserviamo che

$$n!+(n+1)!+(n+2)! = n!\left(1+n+1+(n+1)(n+2)\right)$$

$$= n!\left(4+4n+n^2\right) = n!\,(n+2)^2.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(n+2)}\,2^n}{n!\,(n+2)^{\cancel{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2-1)\cdot 2^n}{n!\,(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2-(1+2)\right) - \frac{1}{4}\left(e^2-(1+2+2)\right) = \frac{e^2-1}{4}. \qquad \square$$

(b) Le stime

$$n\ln n - n = \int_0^n \ln x\,dx \leq \ln(n!) \leq \ln(n^n) = n\ln n$$

implicano che $\ln(n!) \sim n\ln n$.

Quindi per $x>0$

$$0 < a_n = \frac{2^{nx}+x^2}{(n+2^{nx^2})\ln(n!)} \sim \frac{2^{nx}}{2^{nx^2}\cdot n\ln n} = \frac{2^{n(x-x^2)}}{n\ln n}$$

mentre per $x<0$

$$a_n \sim \frac{x^2}{2^{nx^2} n\ln n}$$

Così se $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 2^{x-x^2} & \text{se } x>0 \\ 2^{-x^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

e per il criterio della radice n-sima la serie converge per $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ e diverge per $x \in (0,1)$.

Se $x=1$, $a_n \sim \frac{1}{n\ln n}$ e la serie diverge.

Se $x=0$, $a_n \sim \frac{1}{n^2\ln n}$ e la serie converge.

Riassumendo la serie converge se e solo se

$$x \in (-\infty,0] \cup (1,+\infty). \qquad \square$$

4. Si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x^2}\left(y(x)e^{x/y(x)} + x\right) \\ y(1) = -\dfrac{1}{\ln(2)} \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ e il suo intervallo di esistenza I (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) Dimostrare o confutare che $y(x) < -1$ per ogni $x \in I$.

Svolgimento:

(a) Se $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ allora $y'(x) = u'(x)\cdot x + u(x)$ e l'equazione differenziale diventa

$$u'(x)\cdot x^3 + \cancel{u(x)\cdot x^2} = u(x)\cdot x\left(u(x)\cdot x\, e^{\frac{1}{u(x)}} \cancel{+x}\right)$$

$$u'(x)\cdot x^{\cancel{3}} = u^2(x)\cdot \cancel{x^2}\cdot e^{\frac{1}{u(x)}}.$$

Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int_{-\frac{1}{\ln 2}}^{u} \frac{u'}{u^2}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

ossia

$$\left[e^{-\frac{1}{u}}\right]_{-\frac{1}{\ln 2}}^{u} = \left[\ln(x)\right]_1^x$$

$\overset{x>0}{\Rightarrow}$ $e^{-\frac{1}{u}} - 2 = \ln x \Rightarrow y(x) = u(x)\cdot x = -\dfrac{x}{\ln(2+\ln(x))}$

con intervallo di esistenza $I = (\frac{1}{e}, +\infty)$ dato dalla condizione $2+\ln(x) > 1$, $x > \frac{1}{e}$. □

(b) Dimostriamo che $\forall x \in I = (\frac{1}{e}, +\infty)$

$$y(x) = -\frac{x}{\ln(2+\ln(x))} < -1 .$$

La disuguaglianza per $x > \frac{1}{e}$ è equivalente a

$$x > \ln(2+\ln(x))$$

ossia

$$e^x > 2 + \ln(x)$$

la quale è vera perché per $x > 0$

$$e^x > 1+x$$

dove $y = 1+x$ è la retta tangente al grafico della funzione convessa e^x in $x=0$ e

$$1+x \geq 2+\ln(x)$$

dove $y = 1+x = 2+(x-1)$ è la retta tangente al grafico della funzione concava $2+\ln x$ in $x=1$.

$\square$