

Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

22 Giugno 2018

1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x + 2 - \sqrt{4 + 2x}}{(x(x + 2))^a} dx.$$

(a) Per quali valori di $a > 0$, l'integrale è convergente?

(b) Quanto vale l'integrale per $a = 3/2$?

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $f(x) = x^3 + \cos\left(x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{3(\sin(x))^2}{2} - x^2$. Allora $x = 0$ è un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso?

(b) Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di polinomi di secondo grado tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora la successione $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in ogni insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$?

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Quanto vale la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)2^n}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$?

(b) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{nx} + x^2}{(n + 2^{nx^2}) \ln(n!)}$ è convergente?

4. Si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x^2} (y(x)e^{x/y(x)} + x) \\ y(1) = -\frac{1}{\ln(2)} \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ e il suo intervallo di esistenza I (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) Dimostrare o confutare che $y(x) < -1$ per ogni $x \in I$.