Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

1 Febbraio 2018

1. Per $n \in \mathbb{Z}$ si consideri l'integrale improprio

$$I_n = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{(x^2+2)\cos((n^2-4n+3)x)}{x^3}\,dx.$$

(a) Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{Z}$ l'integrale improprio è convergente.

(b) Calcolare I_2.

2. Sia h una funzione continua in $(0,+\infty)$. Per $n \in \mathbb{N}^+$ sia

$$f_n(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} h(t)\,dt$$

e siano a e b numeri positivi con $a < b$.

(a) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0,a]$?

(b) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[a,b]$?

(c) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[b,+\infty)$?

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Per quali valori di $A, B \in \mathbb{R}$ seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^n + A + \frac{B}{n}\right).$$

(b) Siano $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ due successioni di numeri positivi.
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente e per ogni $n \geq 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente?

4. Si consideri per $y_0 > 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(x^2 y(x) - 2) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ per $y_0 = 1$ (suggerimento: porre $u(x) = 1/y(x)$).

(b) Determinare per quali valori di $y_0 > 0$ la soluzione è limitata nell'intervallo massimale di esistenza.