Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 12 Settembre 2017

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

1. Per $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in (0,1)$, si consideri la funzione

$$f_a(x) = \frac{\cos(2x)(x - \sin(x))}{x^a (1-x)^{1/a} \sqrt{\sin(\pi x)}}.$$

(a) Per quali valori di $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,dx$ è convergente?

(b) Esiste $t \in (0,1)$ tale che $\displaystyle\int_0^t f_1(x)\,dx = 0$?

Svolgimento:

(a) Notiamo che il segno di f_a è

$$\underset{0}{*}\overset{+++}{\text{———}}\underset{\frac{\pi}{4}}{\bullet}\overset{--}{\text{——}}\underset{1}{*}$$

Inoltre per $x \to 0^+$

$$f_a(x) \sim \frac{1\cdot\left(x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right)}{x^a \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi x}} \sim \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{x^{a-\frac{5}{2}}}$$

Quindi l'integrale è convergente in un intorno di 0^+ sse $a - \frac{5}{2} < 1$ ossia per $a < \frac{7}{2}$.

Invece per $x \to 1^-$

$$f_a(x) \sim \frac{\cos 2\,(1-\operatorname{sen}(1))}{1\cdot(1-x)^{\frac{1}{a}}\sqrt{\pi(1-x)}} \sim \frac{c}{(1-x)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}$$

Quindi l'integrale è convergente in un intorno di 1^- sse $\frac{1}{a} + \frac{1}{2} < 1$ ossia per $a > 2$.

Così per $a>0$ l'integrale converge sse $a \in \left(2, \frac{7}{2}\right)$. □

(b) Notiamo che $F(t) = \int_0^t f_1(x)\,dx$ è una funzione continua in $[0,1)$ (per (a) $1 < \frac{7}{2} \Rightarrow F(0)=0$).

Dato che $f_1(x) > 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $F(\pi/4) > 0$. Inoltre $f_1(x) < 0$ in $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ e $1 < 2$ (vedi (a)) implicano

$$\lim_{t \to 1^-} F(t) = -\infty$$

Così per il teo. degli zeri $\exists\, t \in \left(\frac{\pi}{4}, 1\right) : F(t) = 0$. □

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ è convergente?

In caso di convergenza, quanto vale la somma della serie?

(b) Quanto vale il limite $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t^2} - \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nt}\right)$?

Svolgimento:

(a) Consideriamo le somme parziali per $x \neq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} nx^n = x \cdot \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right)$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}\left(-(N+1)x^N \cdot (1-x) + (1-x^{N+1})\right)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \left(1-(N+1)x^N + Nx^{N+1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{|x|<1} \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Le somme parziali non convergono per $|x| \geq 1$. $\square$

(b) Per $t>0$, sia $x = e^{-t} \in (0,1)$. Quindi per (a),

$$\frac{1}{t^2} - \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nt} = \frac{1}{t^2} - \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{e^t}{(e^t-1)^2}$$

$$= \frac{(e^t-1)^2 - t^2e^t}{t^2(e^t-1)^2} = \frac{\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)^2 - t^2\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2(\cancel{1}+t+o(t)-\cancel{1})^2}$$

$$= \frac{1}{t^4+o(t^4)} \cdot \left(\cancel{t^2} + \cancel{t^3} + \frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{6} - \cancel{t^2} - \cancel{t^3} - \frac{t^4}{2} + o(t^4)\right)$$

$$\to \frac{1}{4} + \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{3+4-6}{12} = \frac{1}{12}.$$

$\square$

3. Per $x > 0$ e per ogni intero positivo n sia

$$f_n(x) = \frac{(n\ln(x))^2}{x^n}.$$

(a) Per quali $a > 0$ la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(a, +\infty)$?

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} n f_n(x)\, dx$ per ogni $a > 0$.

Svolgimento:

(a) Notiamo che per $x > 0$, per $n \to \infty$

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Quindi $f_n \xrightarrow{P} f = 0$ in $[1, +\infty)$ e possiamo supporre $a \geq 1$. Per $a \geq 1$ abbiamo che

$$f_n'(x) = \frac{n^2}{x^{2n}} \left(\frac{2\ln x}{x} \cdot x^n - \ln^2 x \cdot n x^{n-1} \right)$$

$$= \frac{n^2}{x^{n+1}} \ln(x)\,(2 - n\ln x) \quad \Rightarrow \quad 1 \;\; ++ \;\; e^{2/n} \;\; ---$$

Così per $a = 1$

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(e^{2/n}) = \frac{4}{e^2} \not\to 0$$

mentre per $a > 1$, definitivamente $e^{2/n} < a$ e

$$\sup_{x\in(a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) \to 0.$$

Quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente in $(a, +\infty)$ se e solo se $a > 1$. $\square$

(b) Abbiamo che per $a>0$ e $n>1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^n}\,dx \underset{\substack{\ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt}}{=} \int_{\ln a}^{+\infty} t^2 e^{-(n-1)t}\,dt$$

$$\underset{\substack{\text{Integrazione} \\ \text{per parti}}}{=} \left[\frac{-e^{-(n-1)t}}{(n-1)^3}\left(2+2(n-1)t+(n-1)^2t^2\right)\right]_{\ln a}^{+\infty}$$

$$= \frac{a^{-(n-1)}}{(n-1)^3}\left(2+2(n-1)\ln a+(n-1)^2\ln^2 a\right).$$

Quindi

$$\int_a^{+\infty} \underbrace{n f_n(x)}_{\geq 0}\,dx = \frac{n^3}{(n-1)^3}\cdot\frac{1}{a^{n-1}}\left(2+2(n-1)\ln a+(n-1)^2\ln^2 a\right)$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ 2 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$\square$

4. Per $b \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'(x) = \left(\dfrac{y(x)}{x} - 3\right)^2 \\ y(1) = b \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ per $b = 2$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) Determinare un valore di $b \in \mathbb{R}$, tale che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione $y(x)$ sia un intervallo limitato.

Svolgimento:

(a) Se $y = x \cdot u$ allora $y' = u + x \cdot u'$ e l'eq. diff. diventa

$$4(u + xu') = (u-3)^2 = u^2 - 6u + 9$$

ossia

$$4xu' = u^2 - 10u + 9 = (u-1)(u-9).$$

Dato che $u(1) = b$, la soluzione è stazionaria per $b=1$ e $b=9$. Altrimenti, separando le variabili, per $x>0$, otteniamo

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{4\,du}{(u-1)(u-9)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-9} - \frac{1}{u-1}\right)du$$

da cui

$$2\ln(x) + C = \ln\left|\frac{u-9}{u-1}\right|, \qquad Ax^2 = \frac{u-9}{u-1}$$

dove $A = \dfrac{b-9}{b-1}$. Infine

$$y(x) = x \cdot u(x) = \frac{Ax^3 - 9x}{Ax^2 - 1} \qquad (*)$$

Se $b = 2$ allora $A = -7$ e la soluzione è

$$y(x) = \frac{7x^3 + 9x}{7x^2 + 1} \qquad \forall x \in (0, +\infty). \qquad \square$$

(b) Dalla soluzione generale (*), per avere un intervallo di esistenza limitato in $(0,+\infty)$ basta che Ax^2-1 si annulli per qualche $x_0>1$. Questo accade se $A=\frac{b-9}{b-1}\in(0,1)$ ossia per ogni $b>9$.

Ad esempio per $b=10$ si ha che $A=\frac{1}{9}$ e la soluzione

$$y(x)=\frac{x^3-81x}{x^2-9}$$

ha come intervallo di esistenza in $(0,+\infty)$ l'intervallo limitato $(0,3)$. $\square$