

Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

12 Settembre 2017

1. Per $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in (0, 1)$, si consideri la funzione

$$f_a(x) = \frac{\cos(2x)(x - \sin(x))}{x^a(1-x)^{1/a}\sqrt{\sin(\pi x)}}.$$

(a) Per quali valori di $a > 0$ l'integrale improprio $\int_0^1 f_a(x) dx$ è convergente?

(b) Esiste $t \in (0, 1)$ tale che $\int_0^t f_1(x) dx = 0$?

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ è convergente?

In caso di convergenza, quanto vale la somma della serie?

(b) Quanto vale il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t^2} - \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nt} \right)$?

3. Per $x > 0$ e per ogni intero positivo n sia

$$f_n(x) = \frac{(n \ln(x))^2}{x^n}.$$

(a) Per quali $a > 0$ la successione $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in $(a, +\infty)$?

(b) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} nf_n(x) dx$ per ogni $a > 0$.

4. Per $b \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'(x) = \left(\frac{y(x)}{x} - 3 \right)^2 \\ y(1) = b \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ per $b = 2$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).

(b) Determinare un valore di $b \in \mathbb{R}$, tale che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione $y(x)$ sia un intervallo limitato.