

Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

24 Luglio 2017

1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{(x+1) \ln|x+1|}{(x^2 + 2ax + 3a - 1)^2} dx.$$

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio è convergente?

(b) Calcolare l'integrale per $a = 1$.

2. Sia $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali.

(a) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ è convergente ad una somma finita allora il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste ed è finito?

(b) Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ nei seguenti due casi: $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ e $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n^2 + 1)}$.

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se la successione tende puntualmente in $[a, b]$ ad una funzione f allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in [a, b]} f_n(x) \right) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)?$$

Se la successione tende uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione f allora allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in [a, b]} f_n(x) \right) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)?$$

(b) Quanto vale il seguente limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in [1/4, +\infty)} \sum_{k=1}^n (x-1)^k \right)$?

4. Per $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = ae^{-x}(y(x))^3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = e^x y(x)$).

(b) Per quali valori di a , la soluzione $y(x)$ è uniformemente continua in \mathbb{R} ?