

## Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

24 Luglio 2017

1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{(x+1) \ln|x+1|}{(x^2 + 2ax + 3a - 1)^2} dx.$$

(a) Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  l'integrale improprio è convergente?

(b) Calcolare l'integrale per  $a = 1$ .

2. Sia  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  una successione di numeri reali.

(a) Se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  è convergente ad una somma finita allora il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  esiste ed è finito?

(b) Calcolare  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  nei seguenti due casi:  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$  e  $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n^2 + 1)}$ .

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  una successione di funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Se la successione tende puntualmente in  $[a, b]$  ad una funzione  $f$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{x \in [a, b]} f_n(x) \right) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)?$$

Se la successione tende uniformemente in  $[a, b]$  ad una funzione  $f$  allora allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{x \in [a, b]} f_n(x) \right) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)?$$

(b) Quanto vale il seguente limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{x \in [1/4, +\infty)} \sum_{k=1}^n (x-1)^k \right)$ ?

4. Per  $a \in \mathbb{R}$  si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = ae^{-x}(y(x))^3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione  $y(x)$  (suggerimento: porre  $u(x) = e^x y(x)$ ).

(b) Per quali valori di  $a$ , la soluzione  $y(x)$  è uniformemente continua in  $\mathbb{R}$ ?