Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 3 Luglio 2017

Nome e cognome: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

1. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se f è uniformemente continua e derivabile in $(-1,1)$ allora anche f' è uniformemente continua in $(-1,1)$.

(b) Se f è uniformemente continua e derivabile in $\mathbb{R}$ allora anche f' è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(c) Se f è uniformemente continua in $(-1,1)$ e F è una primitiva di f allora anche F è uniformemente continua in $(-1,1)$.

(d) Se f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$ e F è una primitiva di f allora anche F è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) FALSO. Per il teo di Heine-Cantor, $f(x)=\sqrt{x+1}$ è unif. continua in $[-1,1]\supset(-1,1)$ mentre $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ non è unif. continua in $(-1,1)$ perché $\lim_{x\to -1} f'(x)=+\infty$.

Un altro esempio è $f(x)=\arcsin x$. $\square$

(b) FALSO. Ad esempio $f(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ è unif. continua in $\mathbb{R}$ perché $\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_x^y \sin(t^2)\,dt\right|\leq 1\cdot|y-x|.$$

Invece $f'(x)=\sin(x^2)$ non è unif. continua in $\mathbb{R}$ perché se $x_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ e $y_n=\sqrt{n\pi}$ allora per $n\to+\infty$,

$x_n-y_n\to 0$ e $|f(x_n)-f(y_n)|=1\not\to 0$. $\square$

(c) VERO. Per l'unif. continuità f si estende ad una funzione $\tilde{f}$ continua in $[-1,1]$. Per il teo. di Weierstrass $M := \max_{[-1,1]} |\tilde{f}(x)| < +\infty$.

Inoltre $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Così $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq M\,|x-y|$$

che implica l'unif. continuità di F in $\mathbb{R}$. $\square$

(d) FALSO. Ad esempio $f(x) = x$ è unif. continua in $\mathbb{R}$ mentre $F(x) = \frac{x^2}{2}$ non lo è. $\square$

2. (a) Sia f una funzione continua in $[0,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^{2r} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln(2) \quad , \quad \lim_{R\to+\infty} \int_R^{2R} \frac{f(t)}{t}\,dt = 0.$$

(b) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$ è convergente?
Nel caso sia convergente quanto vale?

Svolgimento:

(a) Per ipotesi per $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $|f(t)-f(0)|<\varepsilon$ per $0\le t<\delta$

Allora per $0<r<\frac{\delta}{2}$

$$\left|\int_r^{2r} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\ln 2\right| = \left|\int_r^{2r} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right|$$

$$\le \int_r^{2r} \frac{|f(t)-f(0)|}{t}\,dt < \varepsilon\cdot\int_r^{2r} \frac{1}{t}\,dt = \varepsilon\ln 2 < \varepsilon.$$

Per il secondo limite lo svolgimento è simile.

Per ipotesi per $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $|f(t)|<\varepsilon$ per $t>\delta$.

Allora per $R>\delta$

$$\left|\int_R^{2R} \frac{f(t)}{t}\,dt\right| \le \int_R^{2R} \frac{|f(t)|}{t}\,dt < \varepsilon\int_R^{2R} \frac{1}{t}\,dt = \varepsilon\ln 2 < \varepsilon.$$

$\square$

(b) Dimostriamo prima la convergenza.

Per $x\to 0^+$, $\displaystyle f(x) := \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \sim \frac{1-x-(1-2x)}{x} \sim 1$

e quindi f è integrabile in un intorno destro di 0.

Per $x\to+\infty$, $\displaystyle 0 \le \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \le \frac{e^{-x}}{x} \overset{x\ge 1}{\le} e^{-x}$

e quindi f è integrabile in un intorno di $+\infty$.

Stabilita la convergenza dell'integrale determiniamo il suo valore. Per $R>1$ sia $f(x)=e^{-x}$

$$\int_{1/R}^{R} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_{1/R}^{R} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{1/R}^{R} \frac{f(2x)}{x}\,dx$$

$t = 2x$

$$= \int_{1/R}^{R} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{2/R}^{2R} \frac{f(t)}{(t/2)}\,d(t/2)$$

$$= \int_{1/R}^{2/R} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{R}^{2R} \frac{f(x)}{x}\,dx .$$

Per il punto (a), per $R \to +\infty$ si ottiene che

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = f(0)\ln 2 - 0 = \ln 2. \qquad \square$$

3. Stabilire in ciascun caso se la serie sia convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{1+\frac{1}{n}}+1)^n}{n^{n+2}\ln(n^2+1)}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)e^x\,dx$.

Svolgimento:

(a) Per $n \geq 1$

$$\frac{\left(n^{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n}{n^{n+2}\ln(n^2+1)} \geq \frac{\left(n^{1+\frac{1}{n}}\right)^n}{n^{n+2}\ln(n^2+1)} = \frac{1}{n\ln(n^2+1)} \sim \frac{1}{2n\ln n}$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n} = +\infty$, per confronto anche la serie richiesta è divergente. $\square$

(b) Per $n \geq 1$

$$I_n := \int_0^{\pi} \cos(nx)e^x\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}e^x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)e^x\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} e^x\,d(\cos(nx)) = \left[\frac{\cos(nx)e^x}{n^2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)e^x\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2} - \frac{1}{n^2}I_n \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}.$$

Quindi

$$\sqrt{n}\,|I_n| \leq \sqrt{n}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{n^2+1} \leq \frac{(e^{\pi}+1)}{n^{3/2}}.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ è convergente, per confronto la serie richiesta è assolutamente convergente e dunque è anche convergente. $\square$

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) Determinare tutte le soluzione $y(x)$.

(b) Esiste una soluzione $y(x)$ che sia una funzione limitata in $\mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) Dal polinomio caratteristico $z^2+3z+2=(z+2)(z+1)$ si ha che $y_{om}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

Troviamo una soluzione particolare della forma

$$y_*(x) = A(x)e^{-x} + B(x)e^{-2x}$$

con A e B da determinare. Per il metodo delle variazioni delle costanti

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix}$$

da cui

$$A(x) = \int \frac{-e^{-2x}}{-e^{-3x}(1+e^x)}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x).$$

$$B(x) = \int \frac{e^{-x}}{-e^{-3x}(1+e^x)}dx = \int \frac{-e^{2x}}{1+e^x}dx = -e^x + \ln(1+e^x).$$

Dunque $y_*(x) = (e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x) - \underbrace{e^{-x}}_{}$ può essere eliminato.

La soluzione generale è per $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_{om}(x) + y_*(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)$$

$\square$

(b) Dato che y è continua in $\mathbb{R}$, per determinare una soluzione limitata in $\mathbb{R}$ proviamo a imporre che i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ esistano e siano finiti.

È facile verificare che $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \underset{t=e^x}{=} \lim_{t\to0^+}\left(\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\ln(1+t)\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{2}+\frac{c_1+1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+o(1)\right)\underset{\begin{cases}c_1=-1\\ c_2=0\end{cases}}{=}\frac{1}{2}.$$

Quindi esiste una soluzione limitata in $\mathbb{R}$:

$$y(x)=-e^{-x}+\ln(1+e^x)\left(e^{-x}+e^{-2x}\right).$$

□