Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

31 gennaio 2017

1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in 0.

(b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione inversa f^{-1} in 1.

2. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x^2 + x^4}{1 - |x|^a}}\, dx.$$

(a) Determinare per quali valori di $a > 0$ l'integrale improprio è convergente.

(b) Calcolare l'integrale per $a = 2$ e $a = 4$.

3. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$ e si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$, con

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

Rispondere alle seguenti domande.

(a) Se $f(x) = e^{-x}$ quanto vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

(b) Se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ allora il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito?

4. Per ogni intero $n \geq 1$ sia $f_n(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{1 + x^{2n}}\, dx$.

(a) Dimostrare che f_n è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(b) Calcolare il limite puntuale $f(t) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(c) La successione f_n tende uniformemente a f in $\mathbb{R}$?

5. Sia il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 6\sin^2(x) - 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$.

(b) Calcolare $\liminf\limits_{x\to+\infty} y(x)$ e $\limsup\limits_{x\to+\infty} y(x)$.