Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 13 settembre 2016

Nome e cognome:

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{(x-1)(x-4)}}{\ln(1+x+4x^2)}-\frac{16e^x}{2e^{4x}+x^2e^x-2}\right).$$

Svolgimento:

Sviluppiamo i vari termini in 0:

$$\sqrt{(x-1)(x-4)}=2\left(1-\frac{5}{4}x+x^2\right)^{1/2}=2\left(1-\frac{5}{8}x+o(x)\right)=2-\frac{5}{4}x+o(x)$$

$$\ln(1+x+4x^2)=(x+4x^2)-\frac{1}{2}(x+4x^2)^2+o(x^2)$$

$$=x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)=x\left(1+\frac{7}{2}x+o(x)\right),$$

$$16e^x=16+16x+o(x)=16\left(1+x+o(x)\right),$$

$$2e^{4x}+x^2e^x-2=2\left(1+4x+8x^2+o(x^2)\right)+x^2\left(1+o(1)\right)-2$$

$$=8x+17x^2+o(x^2)=8x\left(1+\frac{17}{8}x+o(x)\right).$$

Quindi la funzione di cui dobbiamo fare il limite diventa

$$\frac{1}{x}\left[\frac{2-\frac{5}{4}x+o(x)}{1+\frac{7}{2}x+o(x)}-\frac{2\left(1+x+o(x)\right)}{1+\frac{17}{8}x+o(x)}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\left(2-\frac{5}{4}x+o(x)\right)\left(1-\frac{7}{2}x+o(x)\right)-\left(2+2x+o(x)\right)\left(1-\frac{17}{8}x+o(x)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\cancel{2}-\frac{5}{4}x-7x-\cancel{2}-2x+\frac{17}{4}x+o(x)\right]=-6+o(1).$$

Quindi il limite vale -6. □

2. Per $x > 0$, sia $f(x) = \dfrac{x + \arctan(1/x)}{x^2 + x^4}$.

(a) Determinare $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. (b) Calcolare $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t \cdot \int_t^{+\infty} f(x)\,dx$.

Svolgimento:

Consideriamo per $t>0$ la funzione integrale

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(x)\,dx \underset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{1/t} \frac{u + u^2 \operatorname{arctg} u}{1+u^2}\,du.$$

Con un $\pm \operatorname{arctg} u$ al numeratore otteniamo

$$= \int_0^{1/t} \Big(\underbrace{\frac{u}{1+u^2} + \operatorname{arctg} u}_{(u \operatorname{arctg} u)'} - \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} u}{1+u^2}}_{\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 u\right)'} \Big)\,du$$

$$= \frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{t}\right).$$

(a) $F(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{32}$.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t F(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{t}{2}\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

In alternativa per (b) si può usare Hôpital:

$$\lim_{t\to 0^+} t F(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{1/t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{-1/t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-f(t)}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} t^2 \left(\frac{t + \operatorname{arctg}(1/t)}{t^2 + t^4}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

3. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{[\ln(\ln(n))]^a}{n\ln(n^2+2)}.$$

Svolgimento:

I termini della serie sono positivi.

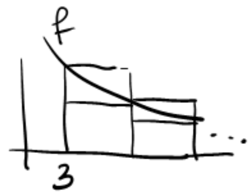
Se $a \geq 0$ allora $(\ln(\ln(n)))^a$ è crescente e

$$\frac{(\ln(\ln n))^a}{n\ln(n^2+2)} \geq \frac{(\ln(\ln 3))^a}{n\ln(n^2+2)} \sim c\cdot\frac{1}{n\ln n}.$$

Dato che la serie $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge, diverge anche la serie data.

Se $a<0$ allora la funzione $f(x)=\frac{(\ln(\ln x))^a}{x\ln x}$ è decrescente per $x \geq 3$ e

$$a_3+\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=3}^{+\infty} f(n) \geq \int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$



Quindi la serie converge sse l'integrale converge

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \underset{t=\ln(\ln x)}{=} \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dt}{t^{-a}}$$

$$dt = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$$

che converge sse $-a>1$ ossia sse $a<-1$.

$\square$

4. Sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni in $C([0,+\infty))$ tali che $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,+\infty)$. Si consideri la successione

$$a_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) e^{-x}\, dx.$$

(a) Dimostrare che se la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente su ogni compatto in $[0,+\infty)$ ad una funzione f in $C([0,+\infty))$ allora il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito.

(b) Se $f_n(x) = \cos^2(nx)$ allora esiste il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$? Nel caso esista, quanto vale?

Svolgimento:

(a) f_n converge puntualmente in $[0,+\infty)$. Sia $f(x)$ il suo limite. f è continua e $0 \leq f(x) \leq 1$.

Sia $L = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$. $L \in [0,1]$ perché $f(x)e^{-x} \geq 0$ e la funzione $t \to \int_0^t f(x) e^{-x} dx$ è quindi crescente e limitata da $\int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Dimostriamo che $a_n \to L$. Sia $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ allora

$$|a_n - L| = \left| \int_0^{+\infty} (f_n(x) - f(x)) e^{-x} dx \right|$$

$$\leq \int_0^R |f_n(x) - f(x)| e^{-x} dx + \int_R^{+\infty} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq 1} e^{-x} dx$$

$$\leq \int_0^R |f_n(x) - f(x)| e^{-x} dx + \underbrace{\int_R^{+\infty} e^{-x} dx}_{= e^{-R}}$$

Sia R sufficientemente grande tale che $e^{-R} < \varepsilon$.

Dato che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sul compatto $[0,R]$, $\exists N$ tale che per $n \geq N$, $\sup_{x\in[0,R]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Così per $n \geq N$

$$|a_n - L| \leq \varepsilon \int_0^R e^{-x} dx + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

□

(b) Notiamo che la successione di funzioni $\cos^2(nx)$ non ha limite puntuale su $[0,+\infty)$ e quindi non possiamo usare (a).

Dato che $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \cos^2(nx)e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(2nx)e^{-x}dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx}_{=1}$$

$$\overset{pp}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\left[e^{-x}\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2n}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2n}dx + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2nx)dx}_{\text{limitato}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

perchè

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(2nx)dx\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

$\square$

5. Considerare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$.
(b) La soluzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(-\pi/2, \pi/2)$?

Svolgimento:

(a) Dal polinomio caratteristico $z^2+1=0$ otteniamo la soluzione omogenea

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Per la soluzione particolare usiamo il metodo delle variazioni delle costanti:

$$y_*(x) = A(x)\cos x + B(x) \operatorname{sen} x$$

dove

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -A'(x)\operatorname{sen} x + B'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow A(x) = \ln \cos x.$$

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = 1 \Rightarrow B(x) = x.$$

Così la soluzione generale in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x)$$

e imponendo le condizioni iniziali

$$y(0) = c_1 = 1 \;, \quad y'(0) = c_2 = -1$$

si ottiene la soluzione cercata:

$$y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x) + x \operatorname{sen} x . \quad \square$$

(b) La soluzione $y(x)$ è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y(x) = -1 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} y(x) = 1 + \frac{\pi}{2}$.

Si noti che $\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(\cos x) = \lim_{t \to 0} t \cdot \ln t = 0$.

Quindi $y(x)$ ammette un'estensione continua

in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e dunque $y(x)$ è uniformemente

continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$