

Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

13 settembre 2016

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(x-1)(x-4)}}{\ln(1+x+4x^2)} - \frac{16e^x}{2e^{4x} + x^2e^x - 2} \right).$$

2. Per $x > 0$, sia $f(x) = \frac{x + \arctan(1/x)}{x^2 + x^4}$.

(a) Determinare $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. (b) Calcolare $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \int_t^{+\infty} f(x) dx$.

3. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{[\ln(\ln(n))]^a}{n \ln(n^2 + 2)}.$$

4. Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di funzioni in $C([0, +\infty))$ tali che $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Si consideri la successione

$$a_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) e^{-x} dx.$$

(a) Dimostrare che se la successione $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente su ogni compatto in $[0, +\infty)$ ad una funzione f in $C([0, +\infty))$ allora il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste ed è finito.

(b) Se $f_n(x) = \cos^2(nx)$ allora esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? Nel caso esista, quanto vale?

5. Considerare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$.

(b) La soluzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(-\pi/2, \pi/2)$?