Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 26 luglio 2016

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

1. Determinare per quali valori di $C \in \mathbb{R}$, esiste $R > 0$ tale che per ogni $x > R$,

$$\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + x + 2}} > \cos\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^3}\right).$$

Svolgimento:

Poniamo $t = \frac{1}{x}$ allora dobbiamo verificare che

$$f(t) - g(t) > 0 \quad \forall x \in (0, \delta) \quad (\delta = \tfrac{1}{R} > 0).$$

dove

$$f(t) = (1 + t^2 + 2t^3)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad g(t) = \cos(t + t^2 + Ct^3).$$

Ora

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t^3) + \frac{3}{8}(t^2 + 2t^3)^2 + o(t^5)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} - t^3 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^5 + o(t^5),$$

$$g(t) = 1 - \frac{(t + t^2 + Ct^3)^2}{2} + \frac{(t + t^2 + Ct^3)^4}{4!} + o(t^5)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} - t^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} - C\right)t^4 + \left(-C + \frac{1}{6}\right)t^5 + o(t^5).$$

Quindi

$$f(t) - g(t) = \left(\frac{5}{6} + C\right)t^4 + \left(\frac{4}{3} + C\right)t^5 + o(t^5).$$

Infine

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - g(t)}{t^4} = \frac{5}{6} + C \Rightarrow f(t) - g(t) \gtrless 0 \text{ per } C \gtrless -\frac{5}{6}$$

Se $C = -\frac{5}{6}$ allora Teo. perm. segno $\exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta)$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - g(t)}{t^5} = \frac{4}{3} + C = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f(t) - g(t) > 0$$

Quindi la disuguaglianza vale per $C \geq -\frac{5}{6}$. $\square$

2. Per ogni intero positivo n, sia $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$,

$$0 < H_n - \ln(n) < 1 \quad \text{e} \quad n \ln n \leq 2 \ln(n!) < 2n \ln n.$$

(b) Per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)(4 - |x-1|)^n}{n(n-1)3^n H_n^3}$ è convergente?

Svolgimento:

(a) Dato che per $k = 1, \dots, n-1$, $\displaystyle\frac{1}{k+1} < \int_{x=k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$

sommando membro a membro otteniamo

$$H_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1} < H_n$$

da cui $0 < H_n - \ln n < 1$.

Inoltre $n^n = \overbrace{n \cdot \ldots \cdot n}^{n \text{ volte}} > 1 \cdot 2 \cdots n = n! \Rightarrow n \ln n > \ln n!$

e dato che $k \cdot (n+1-k) \geq n$ per $k = 1, \dots, n$ si ha

$$(n!)^2 = \underset{\underset{n}{\vee\!/}}{(1 \cdot n)}\underset{\underset{n}{\vee\!/}}{(2 \cdot (n-1))} \cdots \underset{\underset{n}{\vee\!/}}{(n \cdot 1)} \geq n^n.$$

$\square$

(b) Sia $z = \dfrac{4 - |x-1|}{3}$. Se $|z| \leq 1$ la serie converge assolutamente perché per confronto

$$\frac{\ln n!\, |z|^n}{n(n-1) H_n^3} \underset{(a)}{\leq} \frac{\cancel{n} \ln n}{\cancel{n}(n-1)(\ln n)^{3}} \sim \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n>1} \frac{1}{n \ln^2 n}$ è convergente.

Se invece $|z| > 1$ allora

$$\frac{\ln n!\, |z|^n}{n(n-1) H_n^3} \underset{(a)}{\geq} \frac{1}{2} \frac{\cancel{n} \ln n\, |z|^n}{n^2 (\ln n + 1)^3} \sim \frac{1}{2} \frac{|z|^n}{n \ln^2 n} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

e dunque la serie non è convergente.

Così la serie converge se e solo se

$$|z| = \left| \frac{4-|x-1|}{3} \right| \leq 1$$

ossia $\quad -3 \leq 4-|x-1| \leq 3 \; , \quad 1 \leq |x-1| \leq 7.$

Da cui

$$\begin{cases} x-1<0 \\ 1 \leq 1-x \leq 7 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1 \leq x-1 \leq 7 \end{cases} \iff x \in [-6,0] \cup [2,8].$$

$\square$

3. Per ogni intero $n > 0$ sia $I_n = \int_0^1 \frac{20 + 10\sqrt{x} + x^n}{4 + 3x - x^2}\, dx$.

(a) Calcolare $A = \lim_{n\to\infty} I_n$.

(b) Calcolare $B = \lim_{n\to\infty} n(I_n - A)$.

Svolgimento:

Osserviamo che $4+3x-x^2 = -(x+1)(x-4)$ e

$$\int_0^1 \frac{20}{4+3x-x^2}\,dx = 4\int_0^1\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-4}\right)dx = 4\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-4}\right|\right]_0^1$$

$$= 4\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{4}\right) = 12\ln 2 - 4\ln 3.$$

$$10\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4+3x-x^2}\,dx \underset{\substack{t^2=x \\ 2t\,dt=dx}}{=} -20\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2-4)}$$

$$= 4\int_0^1\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 4\left[\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| - \operatorname{arctg}(t)\right]_0^1 = 4\ln 3 - \pi.$$

Inoltre se $f \in C[0,1]$ allora

$$\left|\int_0^1 x^n\cdot f(x)\,dx\right| \le M\int_0^1 x^n\,dx = M\cdot\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$$

dove $M = \max_{[0,1]} |f(x)|$. Così

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0.$$

Con queste premesse calcoliamo i limiti richiesti.

(a) Dato che $f(x) = \dfrac{1}{4+3x-x^2} \in C[0,1]$.

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{20}{4+3x-x^2}\,dx + 10\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4+3x-x^2}\,dx + \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \cdot f(x)\,dx$$

$$= (12\ln 2 - 4\ln 3) + (4\ln 3 - \pi) + 0$$

$$= 12\ln 2 - \pi = A.$$

$\square$

(b) $$I_n - A = \int_0^1 \frac{x^n}{4+3x-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4+3x-x^2}\,d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{4+3x-x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\cdot(3-2x)}{(4+3x-x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \cdot \frac{x(3-2x)}{(4+3x-x^2)^2}\,dx.$$

Dato che $f(x) = \dfrac{x(3-2x)}{(4+3x-x^2)^2} \in C[0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} n(I_n - A) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{6(n+1)} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n \cdot f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.$$

$\square$

4. Siano $\{f_n\}_{n\geq 1}$ e $\{g_n\}_{n\geq 1}$ due successione di funzioni in $C([0,+\infty))$ che convergono uniformemente in $[0,+\infty)$ rispettivamente alle funzioni f e g. Inoltre per ogni $x \geq 0$ e per ogni $n \geq 1$ si ha che $|f_n(x)| \leq 1$, $0 < |g_n(x)| \leq 1$ e $|g(x)| > 0$.
Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) La successione $\{f_n \cdot g_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ a $f \cdot g$.

(b) La successione $\{f_n/g_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ a f/g.

Svolgimento: (a) VERO

Abbiamo che $|g(x)| = \lim_{n\to+\infty} |g_n(x)| \leq 1$ e per $\varepsilon > 0$

$\exists N_1 > 0 : \forall n \geq N_1, \forall x \in [0,+\infty), \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\exists N_2 > 0 : \forall n \geq N_2, \forall x \in [0,+\infty), \ |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Così per $n \geq \max(N_1, N_2)$ e $\forall x \in [0,+\infty)$

$$|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = |\ldots \pm f_n(x) \cdot g(x)|$$
$$\leq |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e quindi $f_n \cdot g_n \xrightarrow{u} f \cdot g$ in $[0,+\infty)$. $\square$

(b) FALSO

Infatti la condizione $|g(x)| > 0$ non implica che $\frac{1}{|g(x)|}$ sia limitata in $[0,+\infty)$.

Siamo ad esempio:

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{u} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad g_n(x) = \frac{1}{x+1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{u} g(x) = \frac{1}{x+1}$$

allora le ipotesi sono soddisfatte ma

$$\left| \frac{f_n(x)}{g_n(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(x + 1 + \frac{1}{n}\right) - (x+1) \right|$$
$$= \left| \cancel{x} + \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{x}{n} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} - \cancel{x} - \cancel{1} \right|$$

e $\sup_{x\in[0,+\infty)} \left| -\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = +\infty$. $\square$

5. Considerare la seguente equazione differenziale:

$$u''(x) + u'(x) = 2\left(u(x) + 1 + 5\sin(x)\right).$$

(a) Trovare tutte le soluzioni.

(b) Determinare, nel caso esista, una soluzione u tale che $u(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) Dal polinomio caratteristico $z^2+z-2=(z-1)(z+2)$

si ha che $u_{om}(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

Inoltre con il metodo della somiglianza:

$f_1(x) = 2 \Rightarrow u_{*,1}(x) = A$ e $A'' + A' - 2A = 2 \Rightarrow A = -1$.

$f_2(x) = 10 \operatorname{sen} x \Rightarrow u_{*,2}(x) = A \operatorname{sen} x + B\cos x$ e

$$(A\operatorname{sen}x + B\cos x)'' + (A\operatorname{sen}x + B\cos x)' - 2(A\operatorname{sen}x + B\cos x) = 10\operatorname{sen}x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A - B = 10 \\ 3B + A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Quindi la soluzione generale è

$$u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - (1 + 3\operatorname{sen}x + \cos x). \qquad \square$$

(b) ESISTE. Possiamo osservare che se $c_1, c_2 > 0$:

per $x \geq 0$, $c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} > c_1 \cdot 1 + 0 = c_1$,

per $x < 0$, $c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} > 0 + c_2 \cdot 1 = c_2$.

Quindi $c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} > \min(c_1, c_2)$.

Inoltre $|3\operatorname{sen}x + \cos x| \leq 3 + 1 = 4$.

Così se ad esempio $c_1 = c_2 = 5$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = 5e^{x} + 5e^{-2x} - 1 - 3\operatorname{sen}x - \cos x > 5 - 1 - 3 - 1 = 0.$$

$\square$