Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 22 giugno 2016

Nome e cognome: $\sqcup\!\sqcup$

1. Sia $f \in C^2([-1,1])$ con un punto stazionario in $x = 0$ e tale che $f(0) = 0$.
(a) Dimostrare che esiste $M \geq 0$ tale che $f(x) \leq Mx^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.
(b) Dimostrare che esiste $R \in (0,1)$ tale che la circonferenza con centro nel punto di coordinate $(0,R)$ e raggio R interseca il grafico di f solo nell'origine.

Svolgimento:

(a) Per la formula di Taylor con il resto di Lagrange, $\forall x \in [-1,1]$ $\exists t \in [-1,1]$ tale che

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(t)}{2}x^2 = \frac{f''(t)x^2}{2} \leq Mx^2$$

dove $M = \frac{1}{2}\max_{t\in[-1,1]}|f''(t)|$ (il max esiste perché $f'' \in C([-1,1])$). $\square$

(b) L'equazione della circonferenza è

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2.$$

Sia $g(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ (semicirconferenza inferiore).
Dato che $f(0) = g(0)$ e $f(x) \leq Mx^2$ per $x \in [-1,1]$ basta dimostrare che per un opportuno $R \in (0,1)$

$$Mx^2 < g(x) \quad \forall x \in [-R,R]\setminus\{0\}.$$

Abbiamo che per $0 < |x| \leq R < 1$

$$R - \sqrt{R^2-x^2} = \frac{\cancel{R^2} - (\cancel{R^2} - x^2)}{R + \sqrt{R^2-x^2}} > \frac{x^2}{2R} \overset{?}{\geq} Mx^2$$

e dunque basta prendere $R = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } M \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2M} & \text{se } M > \frac{1}{2} \end{cases}$. $\square$

2. Per $x \in \mathbb{R}$, consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-1)^n n}{n(x^{2n} + n)}.$$

(a) Calcolare la somma della serie per $x = 1$.
(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente.

Svolgimento:

(a) Per $x=1$, il termine della serie è

$$\frac{1+(-1)^n n}{n(1+n)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{(-1)^n}{1+n}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to+\infty} 1$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - 1 \overset{\text{Serie di Taylor di } \ln(1+x)}{=} \ln 2 - 1$$

Così la somma della serie è $1 + (\ln 2 - 1) = \ln 2$. $\square$

(b) Il termine della serie è

$$\frac{x^n + (-1)^n n}{n(x^{2n}+n)} = \underbrace{\frac{x^n}{n(x^{2n}+n)}}_{a_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{x^{2n}+n}}_{(-1)^n b_n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ per il criterio di Leibniz. Infatti $b_n \to 0$ e $b_{n+1} \leq b_n$ perché

$$x^{2(n+1)} + (\cancel{n}+1) \geq x^{2n} + \cancel{n} \iff x^{2n}(1-x^2) \leq 1$$

e $x^{2n}(1-x^2) \leq 0$ per $|x| \geq 1$ mentre per $|x|<1$

$$0 \leq x^{2n} < 1 \text{ e } 0 < (1-x^2) < 1 \implies x^{2n}(1-x^2) < 1.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi converge anche semplicemente.

Infatti se $|x|>1$

$$|a_n| \leq \frac{|x|^n}{n\, x^{2n}} = \frac{1}{n\,|x|^n} \leq \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$$

e converge per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{|x|}<1$. Se $|x|\leq 1$

$$|a_n| \leq \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

e converge per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Quindi la serie data converge $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

3. Si consideri la funzione

$$f_n(x) = \frac{1}{((x-5)(x+3)+n)\sqrt{|x-1|}}.$$

(a) Per quali interi $n \geq 0$, l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi x) f_n(x)\, dx$ è convergente?

(b) Per quali $a \in \mathbb{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n^a f_n(x)\, dx$ esiste ed è finito?

Svolgimento:

(a) In un intorno di $\pm\infty$ si ha che

$$|\operatorname{sen}(\pi x) f_n(x)| \leq \frac{c}{x^{2+\frac{1}{2}}} = \frac{c}{x^{5/2}}$$

e dato che $\frac{5}{2} > 1$, in tale intorno l'integrale converge. Osserviamo che

$$(x-5)(x+3)+n = x^2 - 2x + n - 15 = (x-1)^2 + (n-16).$$

Quindi

$$(x-5)(x+3)+n = \begin{cases} \text{non si annulla per } n > 16, \\ (x-1)^2 \text{ se } n = 16, \\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \text{ con } \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16-n} \neq 1 \\ \qquad\qquad \text{se } n < 16. \end{cases}$$

Inoltre $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\operatorname{sen} \pi x| \sim \pi |x-k|$.

Controlliamo l'integrabilità in un intorno di 1. Se $n \neq 16$,

$$|\operatorname{sen}(\pi x) f_n(x)| \sim \frac{c\,|x-1|}{\sqrt{|x-1|}} = c\sqrt{|x-1|} \implies \text{convergente}.$$

Se $n = 16$,

$$|\operatorname{sen}(\pi x) f_n(x)| \sim \frac{c\,|x-1|}{(x-1)^2\sqrt{|x-1|}} = \frac{c}{|x-1|^{3/2}} \implies \text{non convergente}.$$

Se $0 \leq n < 16$ allora in un intorno di α_i:

$$|\operatorname{sen}(\pi x) f_n(x)| \sim \begin{cases} \dfrac{c}{|x-\alpha_i|} & \text{se } \alpha_i \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{non convergente}, \\[2em] \dfrac{c\,\cancel{|x-\alpha_i|}}{\cancel{|x-\alpha_i|}} & \text{se } \alpha_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{convergente}. \end{cases}$$

Ora $\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16-n} \in \mathbb{Z}$ se e solo se $16-n$ è un quadrato perfetto e per $0 \leq n < 16$ tali valori sono:

$16-1^2=15$, $16-2^2=12$, $16-3^2=7$, $16-4^2=0$.

Riassumendo, l'integrale dato è convergente per

$$n \in \{0, 7, 12, 15\} \cup \{k : k \geq 17, k \in \mathbb{N}\}. \qquad \square$$

(b) Per $n > 16$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^a f_n(x)\,dx = 2n^a \int_1^{+\infty} \frac{dx}{((x-1)^2+n-16)\sqrt{x-1}} \quad \left(\begin{matrix} f_n \text{ è simmetrica} \\ \text{rispetto a } x=1 \end{matrix}\right)$$

$$\underset{\substack{t=\sqrt{x-1} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}}}{\overset{\uparrow}{=}} 4n^a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+(n-16)} \underset{\substack{s=\frac{t}{(n-16)^{1/4}} \\ (n-16)^{1/4} ds = dt}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{4n^a}{(n-16)} \int_0^{+\infty} \frac{(n-16)^{1/4}\,ds}{s^4+1}$$

$$= \frac{4n^a}{(n-16)^{3/4}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^4+1}}_{\substack{\text{integrale convergente} \\ \text{ad un numero} > 0}} \xrightarrow{n\to+\infty} L \in \mathbb{R} \text{ se e solo se } a - \frac{3}{4} \leq 0.$$

Quindi il limite richiesto esiste ed è finito se e solo se $a \leq \frac{3}{4}$. $\square$

4. Rispondere alle seguenti domande.
(a) Sia $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^a$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0, +\infty)$?

(b) Se f è una funzione uniformemente continua in $(0, +\infty)$ e $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ allora la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0, +\infty)$?

Svolgimento:

(b) Sì. Sia $\varepsilon > 0$, allora dato che f è uniformemente continua in $(0,+\infty)$,

$$\exists \delta > 0 : x, y > 0 \text{ e } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dunque se $n > 1/\delta$, si ha che $\left|(x+\frac{1}{n}) - x\right| = \frac{1}{n} < \delta$ e

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right| < \varepsilon$$

ossia $f_n \to f$ uniformemente in $(0,+\infty)$. □

(a) Dimostriamo che $(x+\frac{1}{n})^a \to x^a$ uniformemente in $(0,+\infty)$ se e solo se $a \in [0,1]$.
Infatti se $a \in [0,1]$, $f(x) = x^a$ è unif. continua in $[0,+\infty)$: f è unif continua in $[0,1]$ perché è continua in $[0,1]$ mentre $f'(x) = a x^{a-1}$ è limitata in $[1,+\infty)$ e quindi f è Lip e unif. continua anche in $[1,+\infty)$.
Quindi applichiamo il punto (b).
Se $a < 0$ allora $(x+\frac{1}{n})^a$ è limitata in $(0,+\infty)$ mentre x^a non è limitata. Così per $n \geq 1$

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} \left|(x+\tfrac{1}{n})^a - x^a\right| = +\infty \Rightarrow f_n \overset{u}{\not\to} f.$$

Infine se $a>1$ sia $x_n = n^b$ con $b > \frac{1}{a-1}$

allora $x_n > 0$ e

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \left(n^b + \frac{1}{n}\right)^a - n^{ba}$$

$$= n^{ba}\left(\left(1 + \frac{1}{n^{b+1}}\right)^a - 1\right)$$

$$= n^{ba}\left(\cancel{1} + \frac{a}{n^{b+1}} + o\left(\frac{1}{n^{b+1}}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= n^{ba-(b+1)}\left(a + o(1)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

perché $ba > b+1 \iff b > \frac{1}{a-1}$.

Così

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \to +\infty$$

e $f_n \overset{u}{\not\to} f$. $\square$

5. Per $x > 0$, si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y(x)\,(x - y(x)\ln(x)) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).
(b) La funzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(0, +\infty)$?

Svolgimento:

(a) Sia $y(x) = x\,u(x)$, così $y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$ e

$$x^2\left(u(x) + x\,u'(x)\right) = x\,u(x)\left(x - x\,u(x)\ln x\right)$$

$$x\,u'(x) = -u^2(x)\ln x.$$

La condizione iniziale $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 2$ implica che u non è la soluzione stazionaria 0.

Separando le variabili e integrando

$$-\int_2^{u(x)} \frac{du}{u^2} = \int_1^x \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \left[\frac{1}{u}\right]_2^{u(x)} = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2(x) \Rightarrow y(x) = x\,u(x) = \frac{2x}{1+\ln^2(x)}.$$

$\square$

(b)

$$y'(x) = 2\,\frac{1+\ln^2(x) - \cancel{x}\cdot\frac{2\ln x}{\cancel{x}}}{(1+\ln^2 x)^2} = \frac{2(\ln x - 1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$$

quindi $y'(x) \geq 0$ e y' è continua in $(0,+\infty)$.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$. Così per il teo. di Weierstrass, y' è limitata in $(0,+\infty)$.

Quindi y è Lip. e dunque anche unif. continua in $(0,+\infty)$. $\square$