Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

22 giugno 2016

1. Sia $f \in C^2([-1,1])$ con un punto stazionario in $x=0$ e tale che $f(0)=0$.
(a) Dimostrare che esiste $M \geq 0$ tale che $f(x) \leq Mx^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.
(b) Dimostrare che esiste $R \in (0,1)$ tale che la circonferenza con centro nel punto di coordinate $(0,R)$ e raggio R interseca il grafico di f solo nell'origine.

2. Per $x \in \mathbb{R}$, consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-1)^n n}{n(x^{2n}+n)}.$$

(a) Calcolare la somma della serie per $x=1$.
(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente.

3. Si consideri la funzione

$$f_n(x) = \frac{1}{((x-5)(x+3)+n)\sqrt{|x-1|}}.$$

(a) Per quali interi $n \geq 0$, l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi x) f_n(x)\, dx$ è convergente?
(b) Per quali $a \in \mathbb{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n^a f_n(x)\, dx$ esiste ed è finito?

4. Rispondere alle seguenti domande.
(a) Sia $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^a$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0,+\infty)$?
(b) Se f è una funzione uniformemente continua in $(0,+\infty)$ e $f_n(x) = f(x+\frac{1}{n})$ allora la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0,+\infty)$?

5. Per $x > 0$, si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y(x)\,(x - y(x)\ln(x)) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = y(x)/x$).
(b) La funzione $y(x)$ è uniformemente continua in $(0,+\infty)$?