

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

21 novembre 2014

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (2^{1+x} - 1)^{1/x}, & \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\cos(5x)+1} + \cos(3x)}{(\sin(3x))^2}, \\ \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{3x} + e^{5x})}{\sqrt{(x-4)^4 - 1} - \sqrt[3]{(x+5)^6 + 1}}, & \text{iv)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)^n, \\ \text{v)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(2x) \cdot (\sin(x) - \cos(x))}{(\ln(\tan(x)))^2}, & \text{vi)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^2(2-x)^{1/3}}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

2. Siano l_1 e l_2 le due rette tangenti alla parabola $y = x^2 - 4x + 3$ che passano per l'origine. Se l_1 è tangente alla parabola in $P_1 = (x_1, y_1)$ e l_2 è tangente alla parabola in $P_2 = (x_2, y_2)$, qual è la distanza tra P_1 e P_2 ?

3. Rispondere alle seguenti domande.

i) Sia f una funzione derivabile in $(0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \in (0, +\infty).$$

La funzione f ha necessariamente un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$?

ii) I grafici delle funzioni $g(x) = e^{a/x}$ e $h(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ si intersecano in un punto $P = (x_0, y_0)$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, le rette tangenti in P ai due grafici sono ortogonali?

4. Sia $f(x) = \tan x$.

i) Determinare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

ii) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$, esiste un polinomio P_n tale che

$$f^{(n)}(x) = P_n(f(x)).$$

iii) Calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P_n(t)}{t^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

5. Per ogni intero positivo n , determinare una funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia derivabile in \mathbb{R} e che abbia la seguente proprietà: esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che la retta tangente al grafico di f_n in $P_0 = (x_0, f_n(x_0))$ interseca il grafico di f_n esattamente in n punti, ma è tangente a tale grafico solo in P_0 .