

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

17 ottobre 2014

1. Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{2 + 3i}{(1 - 2i)^2}, \quad z_2 = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1 + i} \right)^{15}, \quad z_3 = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^{28}}{(1 - i)^{50}}.$$

2. Calcolare

i) l'area del poligono di vertici $\{z \in \mathbb{C} : (z^4 - 81)(z^4 + 64) = 0\}$;

ii) il perimetro del poligono di vertici $\left\{ z \in \mathbb{C} : z^6 = \frac{1}{(3 - 2i)^6} \right\}$.

3. Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

i) Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

ii) Dimostrare che se $|z| < 1$ allora $|z^n - 1| \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|}$.

4. Sia $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$ e sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

i) Dimostrare che f è una funzione biunivoca da D in D e determinare la funzione inversa f^{-1} .

ii) Determinare per ogni $t \in [0, 1]$ la cardinalità dell'insieme

$$\{z \in D : f(z) = tz\}.$$

5. Siano u, v, w tre numeri complessi distinti.

i) Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo isoscele con un angolo retto nel vertice v allora

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 = 0.$$

ii) Dimostrare che se u, v, w sono i vertici di un triangolo equilatero allora

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 = 0.$$