1. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni intero $n \geq 2$, $\quad \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$.

ii) Per ogni intero $n \geq 1$, $\quad 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

iii) Siano $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e per ogni intero $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Allora per ogni intero $n \geq 0$, $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ dove $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ e $\beta = (1-\sqrt{5})/2$.

Svolgimento:

i) $P(2)$: $\quad 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \displaystyle\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$

ossia $\quad \dfrac{1}{2} = 1-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ che è vero.

$\forall n \geq 2 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\overset{P(n)}{<} \frac{2}{n^2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \overset{?}{<} \frac{2}{(n+1)^2}$$

ossia

$$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} \frac{n^2}{(n+1)^2}, \qquad 1-\frac{n^2}{(n+1)^2} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \overset{?}{<} (n+1)^{3/2}$$

$$4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 \overset{?}{<} (n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$$

$$n^2+n \overset{?}{<} n^3, \qquad n+1 \overset{?}{<} n^2, \qquad 1 \overset{?}{<} n(n-1)$$

vero per $n \geq 2$.

$\square$

ii) $P(1)$: $2(\sqrt{2}-1) < \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1$, $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ ok

$\forall n \geq 1$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{P(n)}{>} 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\overset{?}{>} 2\left(\sqrt{n+2}-1\right)$$

ossia

$$2\sqrt{n+1} - \cancel{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} 2\sqrt{n+2} - \cancel{2}$$

che è equivalente a (perché i due membri sono positivi)

$$\left(2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 \overset{?}{>} \left(2\sqrt{n+2}\right)^2$$

$$4(n+1) + 4 + \frac{1}{n+1} \overset{?}{>} 4(n+2)$$

$$\cancel{4n} + \cancel{4} + \cancel{4} + \frac{1}{n+1} \overset{?}{>} \cancel{4n} + \cancel{8} \quad , \quad \frac{1}{n+1} > 0 \text{ ok.}$$

$\square$

iii) $P(0)$: $\quad F_0 = \dfrac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = 0 \quad$ ok

$P(1)$: $\quad F_1 = \dfrac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\cancel{1}+\frac{\sqrt{5}}{2} - \cancel{1}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1 \quad$ ok

$\forall n \geq 2, \quad P(n) \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n+1)$:

$$F_{n+1} \underset{\text{per def.}}{=} F_n + F_{n-1} \underset{P(n) \wedge P(n-1)}{=} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$\overset{?}{=} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

osserva

$$\alpha^n + \alpha^{n-1} - \alpha^{n+1} \overset{?}{=} \beta^n + \beta^{n-1} - \beta^{n+1},$$

$$\alpha^{n-1}(\alpha + 1 - \alpha^2) \overset{?}{=} \beta^{n-1}(\beta + 1 - \beta^2)$$

che è vera perché si verifica che

$$\alpha + 1 - \alpha^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0$$

e

$$\beta + 1 - \beta^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$$

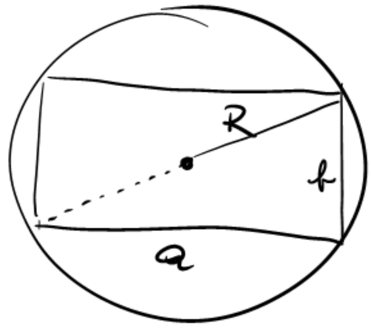
$\square$

2. Dimostrare le seguenti proposizioni.

i) Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza fissata, il quadrato è quello di area massima.

ii) Tra tutti i triangoli di area fissata, il triangolo equilatero è quello di perimetro minimo.

Svolgimento:



i) Se a e b sono i lati di un generico rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio R, allora per il teorema di Pitagora $a^2+b^2=(2R)^2=4R^2$.

Inoltre per la disuguaglianza delle medie aritmetica e geometrica

$$\text{Area} = a\cdot b = (a^2\cdot b^2)^{1/2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$$

e l'$=$ vale se e solo se $a=b$.

Quindi l'area del rettangolo inscritto è sempre minore o uguale della quantità fissata $2R^2$. Inoltre tale area è massima quando $\text{Area}=2R^2$ che si ottiene se e solo se $a=b$ ossia se il rettangolo inscritto è un quadrato. $\square$

ii) Intanto ricordiamo che l'area di un triangolo di lati a, b, c si può calcolare con la formula di Erone

$$A = \left(s(s-a)(s-b)(s-c)\right)^{1/2}$$

dove $s = \frac{p}{2}$ e $p = a+b+c$ è il perimetro del triangolo.

Per la disuguaglianza delle medie aritmetica e geometrica applicata alle variabili $s-a, s-b, s-c \geq 0$ si ottiene

$$\left((s-a)(s-b)(s-c)\right)^{1/3} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}.$$

Ora $\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{3s-p}{3} = \frac{p}{6}$

e $\left((s-a)(s-b)(s-c)\right)^{1/3} = \left(\frac{A^2}{s}\right)^{1/3} = \left(\frac{2A^2}{p}\right)^{1/3}.$

Quindi

$$\left(\frac{2A^2}{p}\right)^{1/3} \leq \frac{p}{6} \iff 12\sqrt{3}\,A \leq p^2.$$

Così fissata l'area A, il perimetro p è minimo se vale l'=. Tale minimo si realizza se e solo se $s-a = s-b = s-c$ ossia se e solo se $a=b=c$ e il triangolo è equilatero.

$\square$

3. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \; : n, m \in \mathbb{N}\}$ è numerabile. Riuscite a trovare una funzione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ in forma esplicita?

Svolgimento:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile perché la seguente è una funzione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$:

$$f(n,m) = 2^n \cdot (2m+1) - 1$$

f è biunivoca perchè ogni numero intero positivo si può scrivere in uno e un solo modo come il prodotto di una potenza di 2 e un numero dispari (vedi il teorema fondamentale dell'aritmetica).

Un altro esempio di funzione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è

$$g(n,m) = \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + n.$$

Anche se per semplicità qui non ne facciamo la verifica vediamo l'"idea" della sua costruzione

0 $(0,0)$	1 $(0,1)$	3 $(0,2)$	6 $(0,3)$	$\dots$
2 $(1,0)$	4 $(1,1)$	7 $(1,2)$	11 $(1,3)$	$\dots$
5 $(2,0)$	8 $(2,1)$	12 $(2,2)$	17 $(2,3)$	$\dots$
9 $(3,0)$	13 $(3,1)$	18 $(3,2)$	24 $(3,3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\square$

4. Determinare delle funzioni

$$\text{i) } f:(0,1)\to\mathbb{R},\quad \text{ii) } g:[0,1)\to[0,1],\quad \text{iii) } h:[1,2]\to[0,1]\cup[2,3],$$

in modo che siano biunivoche:

Svolgimento:

i) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\operatorname{tg}\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$$(0,1)\xrightarrow{\pi(x-\frac{1}{2})}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\xrightarrow{\operatorname{tg}x}(-\infty,+\infty).\qquad\square$$

ii) $g:[0,1)\to[0,1]$ con

$$g(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x\in\left\{\frac{1}{2^n}\text{ con } n\in\mathbb{N}^+\right\}\\ x & \text{altrimenti}\end{cases}$$

In questo modo g "trasla" gli elementi

$$\cdots\to\frac{1}{16}\xrightarrow{g}\frac{1}{8}\xrightarrow{g}\frac{1}{4}\xrightarrow{g}\frac{1}{2}\xrightarrow{g}1$$

e lascia gli altri elementi di $[0,1)$ invariati. $\square$

iii) $h:[1,2]\to[0,1]\cup[2,3]$ con

$$h(x)=\begin{cases}g(2x-2) & \text{se } x\in\left[1,\frac{3}{2}\right),\\ 2x-1 & \text{se } x\in\left[\frac{3}{2},2\right].\end{cases}$$

Così dato che $[1,2]=\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},2\right]$

$$\left[1,\frac{3}{2}\right)\xrightarrow{2x-2}[0,1)\xrightarrow{g}[0,1]$$

$$\left[\frac{3}{2},2\right]\xrightarrow{2x-1}[2,3]$$

$\square$

5. La *parte intera* di un numero reale x, si indica con il simbolo $\lfloor x \rfloor$ e si definisce come il più grande intero minore o uguale a x:

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

i) La funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{N}$ data da $f(n) = \lfloor x^2 + x \rfloor$ è iniettiva?
È surgettiva?

ii) La funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $g(n) = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ è iniettiva?
Il numero 100 appartiene all'insieme $g(\mathbb{N})$?

Svolgimento: i) f non è iniettiva in $[0,+\infty)$ perché

$f(\frac{1}{2}) = \lfloor \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3}{4} \rfloor = 0$ e $f(\frac{1}{3}) = \lfloor \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{4}{9} \rfloor = 0$.

f è surgettiva su $\mathbb{N}$ perché per ogni $n \in \mathbb{N}$,

posto $x_n \stackrel{d}{=} \dfrac{-1+\sqrt{1+4n}}{2} \geq 0$, x_n risolve $x^2 + x = n$

e quindi $f(x_n) = n$. $\square$

ii) Per verificare che g è iniettiva in $\mathbb{N}$ basta far vedere che g è strettamente crescente in $\mathbb{N}$ ossia

$$\forall n \geq 0, \; g(n+1) > g(n). \quad (*)$$

Notiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + 1 > x \geq \lfloor x \rfloor$.

Quindi se $x - y \geq 1$ allora $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor$

infatti $\lfloor x \rfloor > x - 1 \geq y \geq \lfloor y \rfloor$.

Quindi, per quanto detto, basta mostrare che

$$\left((\cancel{n}+\cancel{1})+\sqrt{n+1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)-\left(\cancel{n}+\sqrt{n}+\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)\geq \cancel{1}$$

ossia $\sqrt{n+1}\geq\sqrt{n}$ che è vera.

Infine, per verificare che

$$100 \notin g(\mathbb{N}) = \{g(n) : n \in \mathbb{N}\},$$

basta osservare che

$$g(90)=99 \quad , \quad g(91)=101$$

e per la crescenza in $\mathbb{N}$ di g,

$$\forall n \in [0,90]\cap\mathbb{N}, \qquad g(n) \leq g(90)=99,$$

$$\forall n \in [91,+\infty)\cap\mathbb{N}, \quad g(n) \geq g(91)=101.$$

$\square$