

# Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

24 giugno 2015

1. Rispondere alle seguenti domande.

- i) Quali sono i numeri  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $|z + 2 + i|^2 + 4\bar{z} + 6 + 4i = 0$ ?
- ii) Esiste  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $|w| < 9$  e l'equazione  $|z + 2 + i|^2 + 4\bar{z} + w = 0$  non è soddisfatta per nessun numero  $z \in \mathbb{C}$ ?

2. Calcolare il seguente limite al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4 \arctan(\exp(n^a))}{\pi} \right)^n.$$

3. Sia la seguente successione definita per ricorrenza,

$$x_0 = 7 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \ln(x_n - 3) + 5 \quad \text{per } n \geq 0.$$

- i) Dimostrare che la successione  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  converge ad un limite finito.
- ii) Determinare  $A, B \in \mathbb{R}^+$  tali che  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A < \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} < B$ .

4. Per  $x \in [0, 2]$  sia  $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$ .

Per  $t \in (0, 1)$ , sia  $Q(t)$  l'area del quadrilatero di vertici

$$A = (0, 0), \quad B = (t, f(t)), \quad C = (s, f(s)), \quad D = (1, 0)$$

dove  $s \in (1, 2)$  è l'unico numero reale che soddisfa l'equazione  $f(s) = f(t)$ .  
Determinare  $t_0 \in (0, 1)$  tale che  $Q(t_0) = \sup\{Q(t) : t \in (0, 1)\}$ .

5. Rispondere alle seguenti domande.

- i) Esiste un punto  $P \in \mathbb{R}^2$  tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione  $\sin(x)$  passa per  $P$ ?
- ii) Esiste un punto  $P \in \mathbb{R}^2$  tale che nessuna retta tangente al grafico della funzione  $\sin(x) + x^2$  passa per  $P$ ?